UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POSSÍVEL E NECESSÁRIA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Jaqueline Molon

Santa Maria, RS, Brasil

2013

CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POSSÍVEL E NECESSÁRIA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Jaqueline Molon

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo

Santa Maria, RS, Brasil

2013

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MOLON, JAQUELINE
CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POSSÍVEL E NECESSÁRIA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA / JAQUELINE MOLON.-2013.
195 p.; 30cm

Orientador: EDSON SIDNEY FIGUEIREDO
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2013

1. Cálculo no Ensino Médio 2. Software Geogebra 3. Funções lineares e quadráticas 4. Ensino e aprendizagem de Matemática I. SIDNEY FIGUEIREDO, EDSON II. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (Profmat)

A comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POSSÍVEL E NECESSÁRIA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

elaborada por
Jaqueline Molon

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Orientador: Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo (UFSM)

Cinthya Maria Schneider Meneghetti
____
Profª. Drª. Cinthya Schneider Meneghetti (FURG)

____
Prof. Dr. Pedro Fusieger (UFSM)

Santa Maria, 15 de março de 2013.

Dedico este trabalho a todos os professores de Matemática que fizeram parte do meu caminho, sempre repleto de desafios, mas também muito rico em aprendizado, os quais me fizeram descobrir toda a beleza e todo o encantamento do maravilhoso mundo dessa Ciência.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Edson Sidney Figueiredo pela orientação, pelas ideias e por me ajudar a organizar todo o trabalho, sem, no entanto, limitar a minha criatividade.

À Escola Municipal de Ensino Fundamental Francisco Zilli, em nome da diretora do ano de 2012, Sílvia Leticia Rijo Alves, que autorizou a utilização do laboratório de informática para a execução e a aplicação das atividades ao grupo de ex-alunos da escola.

Aos alunos participantes desse trabalho, pela aceitação do desafio, pelo empenho e por cederem parte de seu tempo para participarem desse estudo.

Aos professores do Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), com os quais pude aprofundar meus conhecimentos matemáticos. Agradeço pelas ideias, sugestões e pelo olhar cuidadoso em toda a minha caminhada no decorrer do curso.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo apoio financeiro (concessão de bolsa de estudos), fundamental para a realização desse curso.

Aos colegas do PROFMAT da turma de 2011 da UFSM pelo convívio e por todas as trocas de experiências que contribuíram ainda mais para a minha formação docente.

Aos colegas do fórum do PROFMAT, os quais nem conheço pessoalmente, mas que através de suas contribuições e discussões nesse ambiente de aprendizagem, me auxiliaram a concluir com mais clareza esta etapa de minha formação profissional.

A minha colega e amiga Janete, pelas inúmeras horas de estudo em conjunto, pelo acolhimento, pelo apoio, pelo reconhecimento e pelas dicas que sempre me ajudaram desde a graduação, e principalmente no período da realização do mestrado.

Aos meus familiares, principalmente minha mãe Diva, meu pai Jorge e meu irmão Vinícius pelo apoio constante e por compreenderem as minhas faltas em função da necessidade de dedicação aos estudos durante os últimos dois anos.

Ao Miguel, meu noivo, companheiro e amigo, por acreditar em mim e por acreditar que esta conquista seria possível, além de sua compreensão e apoio nos momentos de dificuldade.

A Deus, pois sei que essa conquista também é fruto da fé que tenho Nele.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (Profmat)
Universidade Federal de Santa Maria

CÁLCULO APLICADO AO ESTUDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POSSÍVEL E NECESSÁRIA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

AUTORA: JAQUELINE MOLON
ORIENTADOR: EDSON SIDNEY FIGUEIREDO
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 15 de março de 2013.

Este trabalho tem como objetivo principal verificar a possibilidade da inserção, no Ensino Médio, das ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral. Ideias intuitivas de limites de uma função, de taxa de variação média, variação instantânea e o cálculo de áreas abaixo do gráfico de funções positivas, limitadas pelo eixo das abscissas e por retas verticais, ou até mesmo entre funções positivas em um intervalo determinado pelo domínio das mesmas, por exemplo. São conceitos razoavelmente simples, que podem ser introduzidos no ensino médio. Para facilitar o entendimento dessas ideias, aliado ao estudo de funções, pode-se fazer o uso de um recurso computacional como o Geogebra, software utilizado como ferramenta de apoio a aprendizagem nas atividades sugeridas nesse trabalho. As atividades aqui propostas destinam-se a alunos do primeiro ano do ensino médio, aliado ao estudo de funções quadráticas. Pela necessidade de restrição do tema nessa ocasião, o material proposto pode ser adaptado e aplicado às demais funções estudadas nessa série. Destaca-se a importância da introdução dessas ideias no Ensino Médio, de modo a estimular a construção de conhecimentos mais sólidos sobre o comportamento de funções e muitos outros conceitos relacionados, tais como sequências e a própria construção dos conjuntos numéricos, especialmente os números reais. Dessa forma, o estudante pode ampliar sua visão sobre a construção de gráficos a partir da ideia de continuidade de uma função a qual pode ser abordada por problemas simples envolvendo os limites de uma função e seu comportamento, na medida em que tomamos valores de seu domínio cada vez maiores ou menores. Acredita-se que, assim, a longo prazo, os alunos que ingressarem no Ensino Superior nas disciplinas de Cálculo terão condições melhores de compreender os conceitos necessários e, então, os índices de não aprovação nessas disciplinas e outras relacionadas, poderão deixar de ser tão altos. Veremos no decorrer desse trabalho que a causa para esse índice elevado pode estar relacionada com uma formação deficiente das ideias intuitivas de cálculo no Ensino Médio. O trabalho a seguir apresenta uma proposta de atividades sobre o ensino desses tópicos com auxílio do software Geogebra e a análise dos resultados da aplicação dessas atividades a uma turma experimental de alunos do 1º ano do Ensino Médio. Verificou-se que é possível abrir os horizontes no âmbito do ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, com as ideias intuitivas de Cálculo, fazendo o uso de ferramentas diversas, como a utilização de tecnologias apropriadas, e que assim, pode-se inclusive proporcionar aos estudantes novas técnicas de ensino que favoreçam a aprendizagem desses e demais conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Cálculo no Ensino Médio, Funções Quadráticas, Software Geogebra.

ABSTRACT

Master's Dissertation
Professional Master's degree in National network Mathematics (Profmat)
Santa Maria Federal University

CALCULUS APPLIED TO THE STUDY OF QUADRATIC FUNCTIONS IN HIGH SCHOOL: APPROACH POSSIBLE AND NECESSARY WITH THE AID OF SOFTWARE GEOGEBRA

AUTHOR: JAQUELINE MOLON
ADVISOR: EDSON SIDNEY FIGUEIREDO
Place and date of presentation: Santa Maria, 15 of March, 2013.

This piece of work has as its main objective, verifying the possibility of insertion in high-school, of the intuitive ideas of Differential and Integral Calculus applied to the study of quadratic functions. Intuitive ideas of limits of a function, average variation rate, instantaneous variation and even the calculus of areas below the graph of positive functions, limited by the abscissa axis and by vertical lines, or even among positive functions in a determined interval of domain of those, e.g. are fairly simple concepts, which can be inserted in high-school. In order to facilitate the understanding of those ideas, coupled to the study of functions, one can make use of a computational resource such as Geogebra, software used as a learning tool on the activities suggested in the present piece of work. The activities proposed here are intended to first-year students of high-school, ally to the study of quadratic functions, because of the need to restrict the theme on this occasion; however the proposed material may be adapted and applied to other functions studied in this series. Is to highlight the importance of introduction of those ideas in high-school, in a way that stimulates the construction of more solid knowledge about the behavior of functions and many other related concepts, such as consequences and the very construction of numerical conjuncts, especially real numbers. This way the student can expand, for example, his views on the construction of graphs from the idea of continuity of a function which may be approached by simple propositions involving the limits of a function and its behavior, insofar as we take values from its domain each time bigger or smaller. It's believed that, this way, on the long range, the students who entered in college education in the subjects of calculus, will have better conditions to understand the necessary concepts and, thus, the rate of failure in those subjects and other related, may not be so high. We will see in the course of this work, that the cause to that high rate of failure may be related to a faulty forming of intuitive ideas of calculus in high-school. The following piece of work presents a proposal of activities about the teaching of those topics with the aid of the software Geogebra and the analyses of the results of the applying of those activities on an experimental class of first-year high-school students. It's been verified that it's possible opening the horizons in the sphere of learning and teaching of mathematics in high-school, for the intuitive ideas of calculus, making use of several tools, such as the use of adequate technologies and that it's even possible providing the students with new methodologies of teaching that can favor the learning of those and other mathematical concepts.

Key-words: Calculus in high-school, Quadratic functions, Software Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem de Matemática em todos os níveis de escolaridade, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior, tem sido foco de diversos estudos. Os alunos frequentemente demonstram dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos. Muitos deles não encontram sentido ou aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula. Essas dificuldades não se limitam apenas aos conceitos básicos, uma vez que os conteúdos dessa disciplina se encadeiam e é necessária a compreensão de uns para o aprendizado dos assuntos seguintes.

Diversos estudos apontam para a necessidade de uma mudança, principalmente no que diz respeito à linguagem matemática, como destaca Ávila (1993, p.3): “a linguagem não motiva ninguém, ideias sim. Nenhum aluno pode se interessar por qualquer coisa onde não veja algum elemento que lhe satisfaça ou aguce a curiosidade”. No Ensino Médio ocupa-se praticamente todo o primeiro ano com formalismos da teoria dos conjuntos, definições de funções injetoras, bijetoras e sobrejetoras, deixando de lado um ponto muito interessante que se pode apresentar aos alunos: a aplicação de cada função, a visualização do comportamento de cada gráfico, entre outros aspectos.

> O que a Matemática Moderna fez com o ensino de funções redundou num desenvolvimento excessivamente formal, abstrato e longo desse tópico do programa, ocupando toda a primeira série do 2º grau, e afastado das aplicações que podem se constituir em boa motivação. Atualmente gasta-se muito tempo explicando as operações de união, intersecção e produto cartesiano de conjuntos, para se chegar à definição de função como um caso particular de relação. Isto nada tem de motivador para o aluno e é irrelevante nos exemplos de funções que são discutidos nesse estágio do aprendizado, todos eles dados por fórmulas simples. (Ibid., p. 6)

As consequências de um ensino de funções, que não enfatiza a aplicação e a visualização, podem refletir nas dificuldades que se apresentam atualmente nas disciplinas iniciais de Cálculo nos mais diferentes cursos superiores na área das ciências exatas e da tecnologia. Estudos e pesquisas têm apontado que há um grande número de não aprovações nas disciplinas iniciais de Cálculo dos cursos superiores no Brasil que envolvam conteúdos relacionados, principalmente, ao estudo de funções, ou seja, conceitos de limites, derivadas e integrais. Segundo Rezende (2003, p.1):

> Um dos grandes desafios no ensino superior de matemática ainda é, sem dúvida, o tão propalado "fracasso no ensino de Cálculo". Creio que, se investigarmos a origem histórica de tal "fracasso", verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo (REZENDE, 2003, p.1)

Diante dessas colocações, resta-nos questionar: Qual é o motivo para esse fracasso no ensino de Cálculo? Por que esse grande número de reprovações? O aluno que chega ao Ensino Superior possui a base necessária de conhecimentos para compreender as ideias fundamentais do Cálculo? Essas e muitas outras perguntas surgem naturalmente ao refletir sobre esses fatos.

Embasado nesses questionamentos este trabalho se propõe a analisar e propor a inserção das ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, através de atividades de visualização e experimentação, utilizando como recurso computacional o software Geogebra. Destaca-se que já existem esforços para que isso aconteça, um indício forte para essa afirmação é a grande quantidade de trabalhos e pesquisas, já publicados, relacionados com o ensino de Cálculo no Ensino Médio, a exemplo de Rezende(2003), Ávila(1991, 1993, 2006), Duclos(1992) e Machado(2008).

O que será aqui apresentado é o resultado do estudo, do planejamento, da elaboração e aplicação de atividades que, de uma forma acessível, ao serem aplicadas a alunos do 1º ano do Ensino Médio, possam introduzir, de forma intuitiva, as noções de limites, derivadas e integrais, aplicadas ao estudo de funções quadráticas, sem, no entanto, dar ênfase às nomenclaturas mais específicas do Ensino Superior. A proposta inicial é basear o estudo desses assuntos nos três problemas considerados, historicamente, as raízes do Cálculo: o problema da reta tangente, o problema da velocidade instantânea e o problema da área.

Diante dessas colocações, e de acordo com Ávila (1991), é necessário perguntar: O currículo de Matemática do Ensino Médio, já tão repleto de conceitos, suportaria a inserção de mais conteúdos? Ou ainda: Trata-se realmente da inserção de novos conteúdos ou de uma adaptação e de um melhor aproveitamento dos estudos relativos aos conteúdos que já constituem o currículo do Ensino Médio? Esses questionamentos serão foco de discussão no decorrer desse trabalho.

Cabe ressaltar ainda nesse aspecto, quais os objetivos do ensino de Matemática no Ensino Médio.

> O aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos de natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos de habilidades, competências e dos valores desenvolvidos. (BRASIL, 2000, p.6).

A proposta desse trabalho é apresentar ao estudante de uma maneira diferenciada, conhecimentos que lhe permitam continuar aprendendo e interagir com novas tecnologias. Dessa forma, espera-se que a matemática do Ensino Médio possa ser entendida como uma ferramenta a ser aplicada nas mais diferentes situações, seja na sua vida profissional ou em seus estudos futuros. A partir disso, a antiga concepção de que na matemática é necessária apenas a memorização de fórmulas e a aplicação de mecanismos para efetuar cálculos, muitas vezes desconectados de qualquer problema de utilidade real, poderá ser abandonada.

A escolha do tema desse trabalho ocorreu durante os estudos na disciplina de Fundamentos de Cálculo do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), quando o professor relatou àquela turma as dificuldades que os alunos apresentavam ao chegar ao Ensino Superior e ingressar nas disciplinas de Cálculo. Muitas dessas dificuldades relacionadas com a compreensão de conceitos relacionados às funções e seu comportamento, bem como o traçado de seus gráficos.

O estudo de funções no Currículo do Ensino Médio é inclusive citado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Brasil (2000, p.43) como um tema de “caráter integrador”, diante da possibilidade de relacionar demais conceitos matemáticos e da alta aplicabilidade desse estudo as mais diversas áreas do conhecimento, como é o caso da Física, por exemplo. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+), Brasil (2002, p.121) também indicam que o estudo de funções deve estar aliado à exploração de exemplos de aplicação, uma vez que “a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas”.

Os PCN+ ainda relatam a possibilidade de aliar o estudo de sequências ao estudo de funções, de modo a possibilitar ao aluno um contato com as ideias de convergência e infinito, como é o caso do estudo de progressões geométricas infinitas, com razão positiva e menor do que um. Essas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) destacam que:

> O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. (BRASIL, 2002, p.121).

Podemos notar, portanto, que é possível e necessário um esforço no sentido de introduzir as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral, ao currículo do Ensino Médio, aliado ao estudo dos conteúdos já determinados. Além desses indicativos, autores reconhecidos na área da matemática, defendem o desejo de inserir novamente as ideias intuitivas de Cálculo no Ensino Médio. Ávila (1991, p.8) destaca que “seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações”.

Embasado nessas justificativas, o presente trabalho buscou organizar, selecionar e propor diversas atividades com o objetivo de abordar as ideias intuitivas do Cálculo. Para tanto, inicialmente foi proposto a partir da exploração de diversos exemplos e situações-problema, analisar o comportamento de uma função de acordo com as possíveis variações em valores de seu domínio, para introduzir a noção intuitiva de limite. A partir do entendimento desse conceito passou-se a resgatar o conhecimento de velocidade média em um intervalo do domínio de uma função, considerada como a equação do movimento de um objeto, conceito já estudado na disciplina de Física por esses estudantes, nessa etapa da vida escolar.

A partir disso, buscou-se introduzir a noção de velocidade instantânea, de reta tangente ao gráfico de uma função em um determinado ponto e da análise e interpretação do coeficiente angular dessa reta. A seguir abordou-se a ideia do cálculo da área abaixo do gráfico de uma função positiva, limitada pelo eixo das abscissas e por retas verticais, e ainda, entre funções em um determinado intervalo do domínio das mesmas.

Todos os conceitos desenvolvidos utilizaram a visualização, através do software Geogebra, como ferramenta fundamental para auxiliar a aprendizagem e pautaram-se nos conhecimentos prévios dos estudantes sobre as funções quadráticas, as quais já haviam sido estudadas pelos alunos que participaram desse trabalho. As atividades que serão apresentadas podem ser adaptadas para o estudo das demais funções de modo a favorecer um ensino pautado na experimentação e na visualização de situações reais que apresentam como modelos as funções estudadas no 1º ano do Ensino Médio, como é o caso também das funções logarítmicas e exponenciais.

O trabalho foi desenvolvido em duas etapas: a primeira buscou resgatar estudos já desenvolvidos nessa área com a finalidade de selecionar e elaborar as atividades que constituíram a segunda etapa, a de aplicação. As atividades elaboradas contemplaram um roteiro dividido em quatro partes principais. A parte inicial tem como objetivo explorar o software Geogebra, sua sintaxe e algumas de suas funções, utilizando-as para construir gráficos de funções de 1º e 2º graus. Além disso, nesse momento foram explorados o cálculo e a interpretação do coeficiente angular de uma reta como a razão entre as variações de "*y*" e "*x*" respectivamente, em determinados intervalos do domínio de funções de 1º grau.

Na parte seguinte, foram resgatados conceitos como domínio e imagem da função quadrática e o comportamento da função nas proximidades de um ponto, bem como a sua imagem na medida em que os valores de "*x*" crescem ou decrescem ilimitadamente. Dessa forma, foi proposta a introdução das ideias intuitivas, da notação e da definição de limite de uma função. Nessa etapa, também foi introduzido, através de exemplos, o limite de sequências e o limite da soma dos termos de uma sequência de números reais, identificando quando a mesma converge ou diverge. Essa atividade vai ao encontro do que defende os PCN+, conforme destacamos na página 15.

Dando continuidade às atividades propostas, na terceira parte desse roteiro, pretendeu-se revisar o conceito de velocidade média em um intervalo de tempo e aproximar o cálculo da velocidade instantânea através da obtenção de intervalos de tempo cada vez menores e cada vez mais próximos do instante desejado. Além disso, essa etapa apresenta como objetivos também, construir e visualizar o significado de reta tangente ao gráfico de uma função quadrática e interpretar o sinal do coeficiente angular dessa reta em certo intervalo do domínio da função, de modo a analisar seu comportamento.

Finalmente, na última etapa, buscou-se estender o conceito de área de figuras planas para área de regiões delimitadas por gráficos de funções e aproximar o valor dessas áreas. Esse conceito foi abordado utilizando comandos específicos do Geogebra que possibilitaram o entendimento do processo de aproximação da área por retângulos. Esse recurso possibilitava inserir um número finito de retângulos inscritos de bases iguais sob a curva e somar a área desses retângulos. Ao repetir esse processo, na medida em que o número de retângulos vai aumentando cada vez mais, a soma das áreas dos mesmos vai se aproximando cada vez mais do valor da área exata que se pretende calcular.

Para avaliar esse trabalho foram propostas atividades complementares que retomaram os diversos conceitos abordados e também foi aplicado um questionário para identificar se o trabalho foi considerado válido por parte dos alunos integrantes desse estudo.

As atividades que estão sendo sugeridas podem ser aplicadas durante as aulas regulares da disciplina, diferente do que foi feito nesse trabalho. Observa-se que para sua aplicação na íntegra, são necessárias em torno de 20 (vinte) horas/aula. Uma sugestão, tendo em vista que, geralmente, não se dispõe desse número de aulas consecutivas nos laboratório de informática nas escolas, é realizar uma seleção de algumas atividades para serem aplicadas como propostas neste trabalho, e adaptar os outros exercícios para as demais funções, distribuindo e aplicando essas ideias ao longo do desenvolvimento de todo o programa relativo ao estudo de funções no Ensino Médio.

As atividades elaboradas, os resultados da aplicação das mesmas e as conclusões acerca desse estudo sobre a possibilidade e a necessidade da inserção das ideias intuitivas de cálculo aplicado ao estudo de funções quadráticas no Ensino Médio serão apresentados a seguir. As conclusões indicam que é possível aliar algumas ideias do Cálculo ao estudo de funções, fazendo o uso de recursos computacionais de forma a tornar o aprendizado de matemática mais significativo e atraente.

1. DIFICULDADES ENCONTRADAS NO ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR

As dificuldades no ensino de Cálculo e o grande número de não aprovações nessa disciplina e em outras relacionadas no Ensino Superior, já foram citados na introdução deste trabalho. O que faremos nesta seção é apresentar alguns desses índices de não aprovação em cursos oferecidos por universidade brasileiras, bem como mostrar o resultado do levantamento de dados, nesse sentido, nas disciplinas iniciais de Cálculo da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Lima (2007, p.155) afirma: "sempre houve dificuldades para ensinar Matemática". Apesar disso, qual será a causa do fracasso do ensino de Cálculo? Rezende (2003, p. 4) dá indicativos para essa resposta, afirmando que "as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo".

Nesse mesmo estudo, Rezende cita várias instituições de ensino que apresentam resultados não muito satisfatórios em relação ao aproveitamento dos alunos. Como exemplo, Baruffi (1999 apud REZENDE, 2003, p. 1) relata que:

> [...] o índice de não aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%"', enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45%. (BARUFI, 1999 apud REZENDE , 2003, p.1).

Na sequência, Rezende (Ibid., p.2) destaca os índices relativos à UFF – Universidade Federal Fluminense. Segundo ele, "a variação do índice de não aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que para o Curso de Matemática este não é inferior a 65%". Essa situação não é particular de uma universidade ou outra, pois os índices também são semelhantes, por exemplo, na Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, de acordo com os dados fornecidos pelo Departamento de Matemática dessa universidade.

Neste estudo foram levantadas as informações relativas a um período de três anos a contar do segundo semestre de 2009 ao primeiro semestre de 2012. As disciplinas analisadas foram: Cálculo I, Cálculo A, Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo I-A e Cálculo Infinitesimal I. Essas disciplinas possuem, em geral, a mesma ementa, porém são aplicadas a cursos diferentes na UFSM. A contagem realizada buscou simplesmente avaliar quantitativamente o número de aprovações e não aprovações nas disciplinas acima citadas em cada semestre letivo.

Destaca-se que, o número geral de não aprovações engloba as reprovações por nota, as reprovações por frequência, o número de trancamentos parciais e o número de cancelamentos de matrícula. Os resultados desse levantamento de dados serão abordados abaixo. Observa-se que ao citar a disciplina de Cálculo, no decorrer desse trabalho, estará se fazendo referência às disciplinas citadas anteriormente.

No segundo semestre de 2009, ou seja, no período 2009/02, houve 521 alunos matriculados nas disciplinas citadas. Desses, o índice de não aprovação foi de 58,93%, isto é, 307 alunos. A distribuição dos dados nesse período pode ser observada com mais detalhes na Tabela 1. Em todo trabalho adotou-se a seguinte legenda: **AN**– Aprovados com Nota, **RN** – Reprovados com Nota, **RF** – Reprovados por Frequência, **TP / CM** – Trancamento Parcial / Cancelamento de Matrícula.

Tabela 1- Desempenho dos estudantes de Cálculo da UFSM – 2009/02

	AN	**RN**	**RF**	**TP/CM**
Nº de alunos	**214**	**151**	**152**	**4**
Porcentagem	**41,07%**	**28,98%**	**29,17%**	**0,77%**

Na figura 1está indicado o índice de não aprovados e o índice de aprovados em relação ao número total de alunos que cursaram Cálculo nesse semestre.

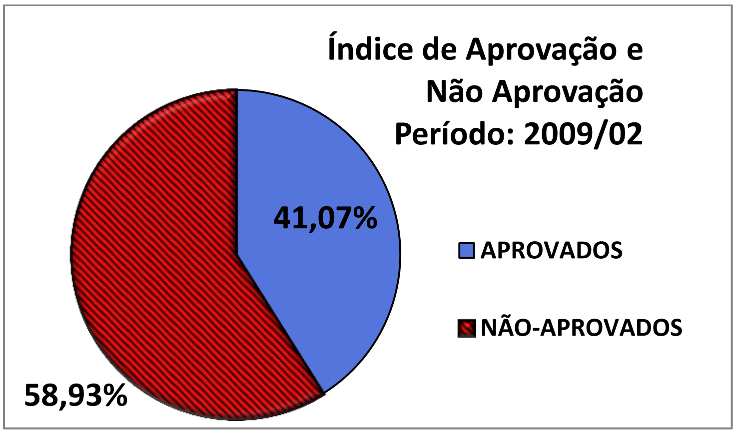


Figura 1 - Índice de Aprovação e Não Aprovação nas disciplinas de Cálculo UFSM 2009/02

No período 2010/01 houve 552 alunos matriculados nas disciplinas citadas. Desses, o índice de não aprovação foi de 51,09%, ou seja, 282 alunos, conforme informado na tabela 2.

Tabela 2 – Desempenho dos estudantes de Cálculo UFSM – 2010/01

	AN	**RN**	**RF**	**TP/CM**
Nº de alunos	**270**	**142**	**136**	**4**
Porcentagem	**48,91%**	**25,72%**	**24,64%**	**0,72%**

O gráfico apresentado na figura 2 relata a realidade do índice de aprovados em relação aos não aprovados em relação ao total de alunos matriculados no primeiro semestre de 2010, nas disciplinas iniciais de Cálculo na UFSM.

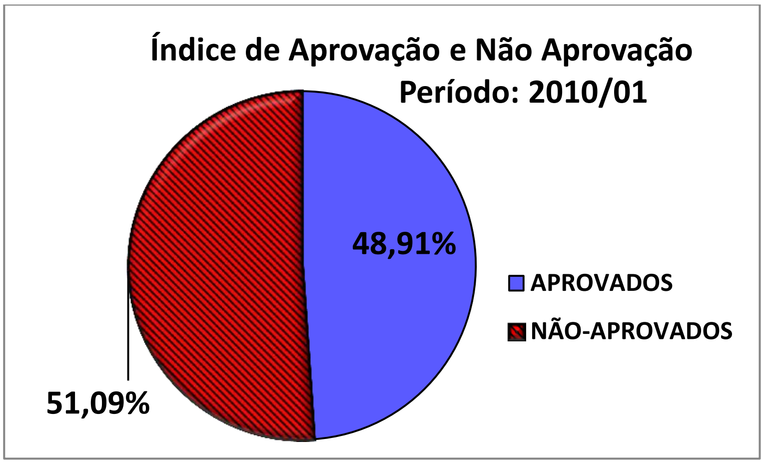


Figura 2 - Índice de Aprovação e Não Aprovação nas disciplinas de Cálculo UFSM 2010/01

Já no período 2010/02 foram matriculados nas disciplinas iniciais de Cálculo, na UFSM, 622 alunos. Nesse semestre o índice de não aprovação foi de 57,56%, ou seja, 358 alunos.

A figura 3 apresenta o gráfico que mostra a disparidade entre os índices de aprovação e não aprovação nesse semestre letivo na UFSM, nas disciplinas analisadas, conforme também pode ser visualizado na tabela 3.

Tabela 3 – Desempenho dos estudantes de Cálculo UFSM – 2010/02

	AN	RN	RF	TP/CM
Nº de alunos	**264**	**213**	**145**	**0**
Porcentagem	**42,44%**	**34,25%**	**23,31%**	**0%**

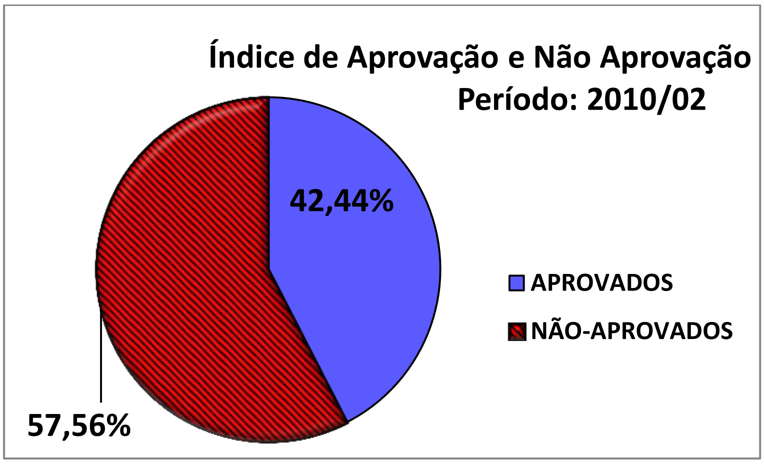


Figura 3 - Índice de Aprovação e Não Aprovação nas disciplinas de Cálculo UFSM 2010/02

No ano de 2011 os índices seguiram o mesmo padrão. No primeiro semestre, de um total de 560 alunos, 47,42% dos alunos obtiveram aprovação, ou seja, a maioria, 295 alunos não foi aprovada de acordo com a Tabela 4.

Tabela 4 – Desempenho dos estudantes de Cálculo UFSM – 2011/01

	AN	RN	RF	TP/CM
Nº de alunos	**266**	**169**	**124**	**2**
Porcentagem	**47,42%**	**30,12%**	**22,10%**	**0,36%**

A figura 4 mostra o gráfico que destaca os índices de aprovação e não aprovação no período 2011/01 nas disciplinas de Cálculo na UFSM.

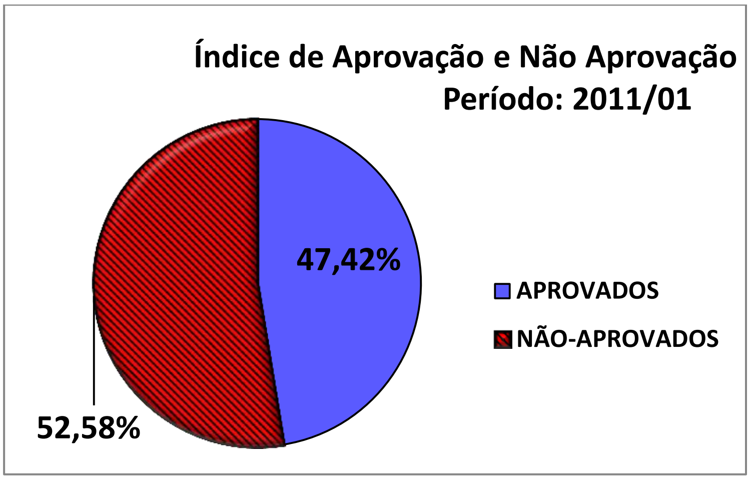


Figura 4 - Índice de Aprovação e Não Aprovação nas disciplinas de Cálculo UFSM 2011/01

No segundo semestre de 2011 os dados levantados são ainda mais díspares, uma vez que o número de alunos que não obtiveram sucesso nas disciplinas analisadas foi de 386 alunos de um total de 644 matrículas. Observe essas afirmações na Tabela 5.

Tabela 5 – Desempenho dos estudantes de Cálculo UFSM – 2011/02

	AN	RN	RF	TP/CM
Nº de alunos	**258**	**216**	**159**	**11**
Porcentagem	**40,06%**	**33,54%**	**24,69%**	**1,71%**

A figura 5 apresenta o gráfico que deixa em destaque a porcentagem de não aprovação prevalecendo sobre a de aprovações nesse semestre. Merece destaque, nesse semestre, o número de trancamentos parciais ou cancelamento de matrícula, como pode ser observado na tabela 5. Além disso, o índice de reprovação por notas prevaleceu, com razoável vantagem, sobre o índice de reprovações por frequência.

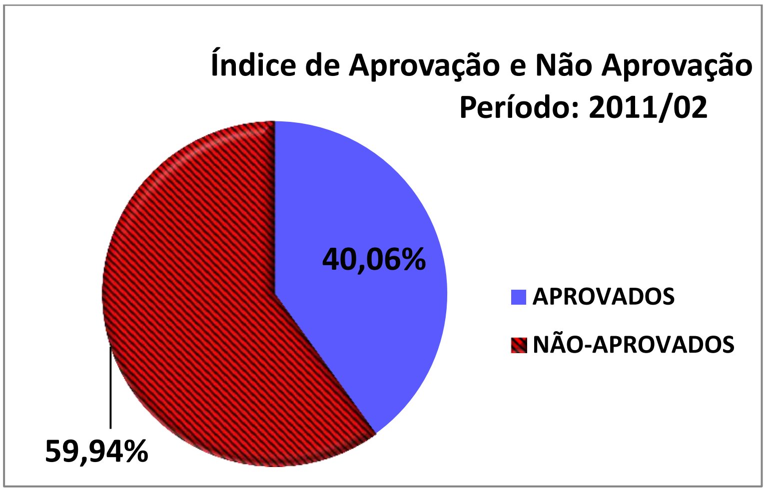


Figura 5 - Índice de Aprovação e Não Aprovação nas disciplinas de Cálculo UFSM 2011/02

O último semestre analisado foi o período 2012/01, onde se verificou de um total de 557 alunos matriculados nas disciplinas acima destacadas, somente 31,42% de aprovação. Constatou-se, portanto, o índice mais elevado de reprovação por nota e por frequência entre os três anos analisados, conforme Tabela 6.

Tabela 6 – Desempenho dos estudantes de Cálculo UFSM – 2011/02

	AN	RN	RF	TP/CM
Nº de alunos	**175**	**198**	**173**	**11**
Porcentagem	**31,42%**	**35,55%**	**31,06%**	**1,97%**

A figura 6 apresenta a grande diferença entre os índices de aprovação e não aprovação no primeiro semestre letivo de 2012 nas disciplinas de Cálculo citadas da UFSM.

Observa-se que a realidade da UFSM aproxima-se dos dados indicados por Rezende (2003) no que se refere aos índices de não aprovação nas disciplinas de Cálculo relacionadas. Tendo em vista esses resultados, é de fundamental importância buscar alternativas para reverter esse quadro indesejável.

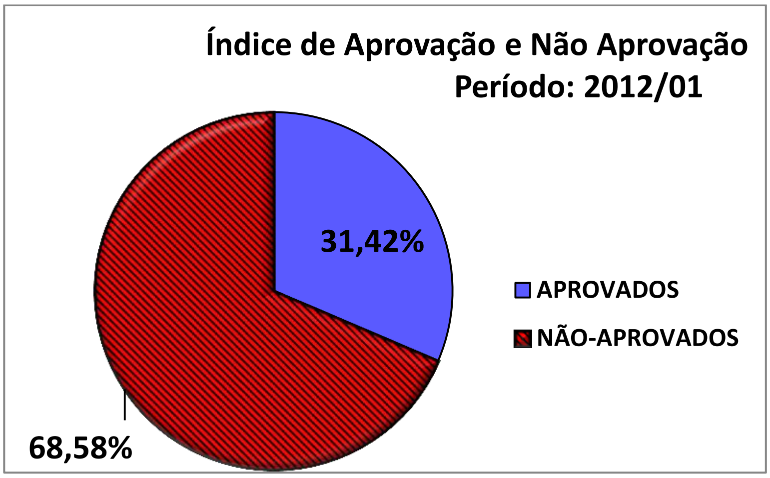


Figura 6 - Índice de Aprovação e Não Aprovação nas disciplinas de Cálculo UFSM 2012/01

Um fato relevante apresentado nesse levantamento de dados é o alto índice de reprovações por frequência, em relação ao total de não aprovações, em cada semestre na UFSM. Para fazer tal comparação observe os índices que estão em destaque na Tabela 7.

Tabela 7 – Índice de Reprovação por Frequência X Índice Total de Não Aprovação

ANO / SEMESTRE	Índice de Reprovação por Frequência	Índice Total de Não Aprovação
2009/02	**29,17%**	58,93%
2010/01	**24,64%**	51,09%
2010/02	**23,31%**	57,56%
2011/01	**22,10%**	52,58%
2011/02	**24,69%**	59,94%
2012/01	**31,06%**	68,58%

A justificativa para esses números expressivos pode estar relacionada com as dificuldades que os estudantes enfrentam ao participar das primeiras aulas de cada uma das disciplinas de Cálculo analisadas. Essas dificuldades, relacionadas aos conceitos abordados inicialmente nessa disciplina, podem levá-los a não acompanhar o pensamento do professor e a sequência do desenvolvimento dos conteúdos. Em função disso, os alunos passam a faltar às aulas e acabam por reprovar por frequência, contribuindo para os índices que foram apresentados. Destaca-se que, essas dificuldades podem surgir, principalmente, em razão da falta de embasamento de conceitos, muitas vezes simples, sobre conteúdos do Ensino Médio, como por exemplo, o estudo de funções, que são pré-requisitos para o entendimento de limites, derivadas e integrais, os conteúdos desenvolvidos nas disciplinas de Cálculo em questão.

Para finalizar o levantamento de dados na UFSM, destacamos que no total foram analisadas 3457 matrículas nas disciplinas iniciais de Cálculo, no período de três anos. Desse total, 1447 alunos foram aprovados com nota, sendo que a maioria, ou seja, os demais 2010 estudantes, não obtiveram sucesso nessas disciplinas, sendo reprovados por nota ou por frequência ou, ainda, efetuaram trancamento parcial ou cancelamento de matrícula. O índice geral de não aprovação nesse período foi de 58,14%, conforme podemos verificar no gráfico apresentado na figura 7.

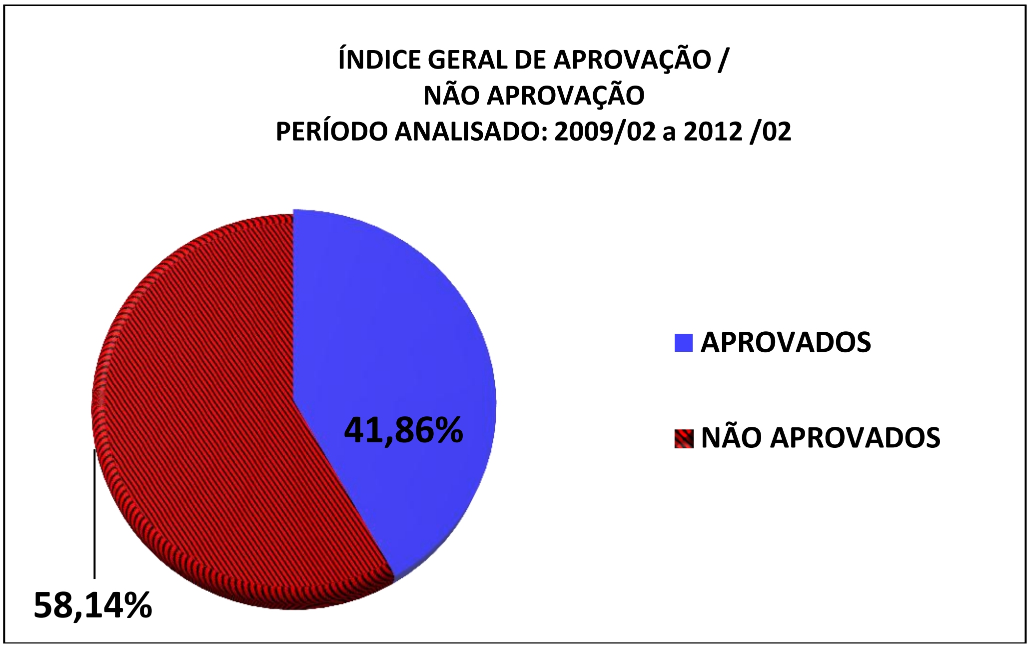


Figura 7 - Gráfico do índice Geral de Aprovação / Não Aprovação no período analisado

Diante dos dados revelados pela pesquisa quantitativa sobre o número de não aprovações nas disciplinas de Cálculo, justifica-se a necessidade de propor alternativas para superar esse problema. Muitas universidades já têm adotado estratégias para minimizar esses números, como é o caso da USP – Universidade de São Paulo, que, segundo Baruffi (1999 apud REZENDE, 2003) passou a ofertar as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral para os Cursos de Matemática e Arquitetura em períodos anuais, diferente dos períodos semestrais que ainda são adotados em outros polos universitários. Além disso, outras instituições também adotaram essa medida, a Universidade Federal do Rio Grande (FURG), por exemplo, oferta Cálculo anual para os cursos de Engenharia.

Nesse sentido, uma reportagem especial intitulada “Cálculo sem pressa é bom” (SIMÕES, 2012, p. 24-33), afirma que o estudante de Cálculo 1 tem seis meses para “estudar tudo o que James Stewart incluiu nas 688 páginas do livro Cálculo Volume 1”. A reportagem ainda afirma que “com a correria o estudante fica sem escolha: se vê obrigado a decorar o que não pode entender. Termina o curso com a impressão de que o cálculo é bonito, tudo bem, mas é também um monte de regras a decorar e seguir à risca”.

Outras estratégias para minimizar as dificuldades dos estudantes nas disciplinas de Cálculo giram em torno da criação ou utilização de laboratórios de informática, com softwares específicos de matemática, para tentar atrair os estudantes. Algumas universidades adaptaram os currículos dos seus cursos introduzindo disciplinas de Pré-Cálculo, Introdução ao Cálculo, e até mesmo, Tópicos de Funções, que revisam e aprofundam os conteúdos abordados no Ensino Médio. Essas disciplinas básicas têm como objetivo principal retomar os conhecimentos dos estudantes acerca do comportamento de funções, introduzir os conceitos de infinito, variabilidade e outros tópicos de importante relevância para o aprendizado subsequente dos conceitos de limites, derivadas e integrais.

Além dessas estratégias já adotadas no Ensino Superior, também se acredita na possibilidade de investir na Educação Básica, introduzindo as ideias fundamentais do Cálculo, principalmente no Ensino Médio, como é a proposta desse trabalho. Dessa forma, investir na Educação Básica pode auxiliar a modificar o quadro de fracasso no ensino e na aprendizagem de Cálculo, proporcionando aos estudantes, desde cedo, o contato com as noções intuitivas necessárias a um bom desempenho nessas disciplinas.

Rezende (2003, p. 13), destaca a educação básica como um agente de importante influência na determinação de dificuldades em Cálculo e de seu ensino.

> Antes de tudo cabe destacar que a maior parte do território do *lugar-matriz* das dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo encontra-se no ensino básico. A evitação / ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O cálculo é, metaforicamente falando, a *espinha dorsal* do conhecimento matemático. (REZENDE, 2003, p. 13, grifo do autor).

Com base em todos os dados apresentados, justifica-se a necessidade da inserção das ideias de Cálculo no Ensino Médio. Atividades que envolvam as ideias intuitivas de limites, que explorem a questão da variabilidade através de problemas de aplicação e o cálculo da área de regiões demilitadas por curvas que são gráficos de funções, podem se mostrar, nesse sentido, bons caminhos para o trabalho significativo da matemática no Ensino Médio. Além disso, proporcionar aos estudantes a utilização de recursos gráficos também contribui para um melhor entendimento desses tópicos, pois promove a autonomia dos estudantes.

Em vista disso, toda a proposta desse trabalho articulou-se com a utilização do Software Geogebra, o qual possibilita além da visualização gráfica também o trabalho algébrico e o cálculo numérico. Essas questões permeiam as atividades que constituem este trabalho e serão apresentadas a seguir.

2. LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS NO ENSINO MÉDIO?

A esta altura, um questionamento plausível é: limites, derivadas e integrais são assuntos viáveis ao entendimento de um aluno do Ensino Médio? Se considerarmos o Cálculo com toda sua linguagem formal, simbólica, seus teoremas e demonstrações, definições e todo o seu rigor, a resposta a esse questionamento seria negativa, pois esses conteúdos repletos de detalhes, exigem conhecimentos específicos que ainda não são do domínio de um estudante nesta fase de sua escolaridade. O que estamos propondo neste trabalho é a simples, porém importante, introdução das ideias intuitivas de cálculo, ou seja, das ideias geradoras desses tópicos de estudo no Ensino Superior. Nesta seção serão apresentadas algumas estratégias para o trabalho com as ideias geradoras do Cálculo diferencial e integral no Ensino Médio.

Baseados na história da matemática (ANTON, 2000, p.112) pode-se perceber que os problemas que motivaram as ideias básicas do cálculo são os três seguintes:

- O problema da Reta Tangente;
- O problema da Área;
- O problema da Velocidade Instantânea.

No entanto, esses problemas apesar de parecerem distintos, possuem uma raiz comum: todos envolvem processos infinitos de aproximação. De acordo com Anton (2000, p.4, grifo do autor), pode-se notar que esses assuntos "estão intimamente ligados pelos princípios fundamentais do Cálculo e que todos eles envolvem de alguma forma, *processos infinitos*". Sendo assim, como relacionar esses temas geradores, aos conteúdos do Ensino Médio de forma a inserir as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral?

Antes de responder a esse questionamento, cabe destacar que o ensino de matemática no Brasil e em outras partes do mundo já contou com o ensino de Cálculo em seu currículo no Ensino Médio. O cálculo deixou de fazer parte dos currículos brasileiros após a reforma da Matemática Moderna, nas décadas de 60 e 70. De acordo com o que defende Ávila (1991, p.3), o Cálculo vem desempenhando um papel de fundamental importância no desenvolvimento das ciências e da tecnologia e, em relação ao currículo de matemática no ensino médio, o autor menciona que "descartá-lo no ensino é grave, porque deixaria de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual".

O trabalho com as ideias geradoras do Cálculo no Ensino Médio, pode se constituir de uma ótima oportunidade de exploração de situações-problema com aplicação na vida real.

Além disso, certamente, o Cálculo, possui a capacidade de atrair a atenção e o interesse dos alunos, já que aborda ideias diferentes das que são normalmente exploradas nessa fase de escolarização.

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. (ÁVILA, 1991, p.3).

Alguns livros do Ensino Médio, atualmente apresentam indicativos da utilização de ideias básicas do Cálculo, como é o caso, por exemplo, de Giovani, J. R.; Bonjorno, J.R (2000) que introduzem a notação de limites e a ideia de soma infinita ao trabalhar com a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão positiva e menor do que 1. Nesse livro, destinado a alunos do 1º ano da etapa complementar da Educação Básica, os autores utilizam ilustrações e uma simbologia matemática adequada para fazer com que o estudante compreenda, através de um processo de recorrência, a construção da sequência de termos da progressão geométrica de razão ½ (um meio) e primeiro termo igual a 1(um). Na sequência, os autores exploram a soma desses termos e conduzem o leitor ao entendimento de que a sequência é convergente e, portanto, o limite da soma desses termos, nesse caso, existe e vale 1. As atividades propostas ainda exploram a ideia de limites infinitos ($+\infty$ e $-\infty$).

Esse livro, ainda aborda casos específicos, de um paradoxo intimamente relacionado com o Cálculo: Aquiles e a Tartaruga, um dos Paradoxos de Zenon, abaixo transcrito:

> Se o espaço e o tempo são contínuos e se for dada a tartaruga uma pequena vantagem em uma corrida com Aquiles, então ele nunca alcançará a tartaruga, pois, quando Aquiles atingir o ponto de partida da tartaruga, ela terá se movido para frente até o ponto B. Quando Aquiles atingir B, a tartaruga terá se movido até C – ad infinitum. Desta forma a tartaruga estará sempre à frente, mesmo que seja por um fio de cabelo. (ANTON, 2000, p.8-9)

Esse interessante paradoxo relaciona os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea e pode servir para aprofundar o conhecimento sobre construção do conjunto dos números reais, tendo em vista que sua abordagem é bastante limitada no Ensino Fundamental. Aqui já se pode notar uma abertura para trabalhar com esses assuntos no Ensino Médio, aliado ao estudo de movimentos, concomitantemente à disciplina de Física. É possível estabelecer relações entre os conteúdos de sala de aula e as aplicações do mundo real, de modo a fazer com que o estudante perceba a necessidade do estudo dos diversos conteúdos do currículo do Ensino Médio, por exemplo.

Figura 8 - Paradoxo Aquiles e a Tartaruga. Fonte: ANTON (2000, p.9)

Pode-se complementar as respostas aos questionamentos realizados acima, acrescentando que diversas situações parecidas com as que aparecem no livro citado anteriormente, utilizando figuras, por exemplo, servem como inspiração para a abordagem da ideia intuitiva de limite.

Aliado ao estudo de funções quadráticas, ao se analisar o comportamento gráfico de algumas funções, é possível fazer com que o aluno compreenda, por exemplo, que os valores de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, para valores reais positivos de a e valores quaisquer para b e c, tornam-se cada vez maiores, na medida em que tomamos valores do domínio dessa função cada vez maiores ou cada vez menores. De forma análoga, quando se considera valores reais negativos para o coeficiente "a", os valores da função quadrática se tornam cada vez menores na medida em que se tomam valores cada vez maiores ou menores para a variável independente x.

O problema da reta tangente, por sua vez, pode ser abordado a partir do conceito de reta secante ao gráfico de uma função, fazendo com que a reta secante se aproxime cada vez mais da posição tangente, na medida em que considerarmos intervalos cada vez menores no domínio dessa função. Destaca-se, porém, que mesmo que o aluno não conheça o significado de reta tangente (e no início do primeiro ano do Ensino Médio, provavelmente não conheça) é possível introduzir esse conceito através da visualização e da experimentação com atividades que façam com que uma reta secante "tenda" a posição tangente em ponto desejado do gráfico da função.

Esse processo também pode ser utilizado para introduzir a noção intuitiva de derivada de uma função em determinado ponto, através do cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto desejado. A introdução desses conceitos pode ser acompanhada das aplicações da Física, e pode facilitar o entendimento dessa disciplina, como afirma Duclos (1992, p.28): “A Física é a base da técnica e a Matemática a linguagem da Física”. Para Ávila (2006, p.37), essa afirmação se justifica uma vez que: “o ensino da derivada é da maior importância, pelo tanto que ajuda no tratamento de inúmeras propriedades das funções. E tem de ser feito logo na primeira série, quando pode integrar-se harmoniosamente com a Física no estudo do movimento”.

Também aliado ao estudo de funções, é possível e natural, falar em taxas de variação. Nessa etapa, é possível falar sobre acréscimos e decréscimos nas variáveis envolvidas e apresentar aos estudantes a notação utilizada para indicar essa variação, Δx ou Δy, por exemplo, (Ibid., p. 31). Em seguida, é possível explorar o cálculo do coeficiente angular de uma reta utilizando a notação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Notação essa que, provavelmente o aluno já tenha visto em seus estudos de Física e relacioná-la com a declividade da reta. Para esse processo de aprendizagem é importante trabalhar com diversos exemplos e problemas concretos, de modo a familiarizar o estudante com a utilização desses conceitos e notações.

Nas atividades elaboradas e aplicadas aos alunos da turma experimental, que aceitaram participar desse trabalho, utilizou-se também o recurso de visualização das modificações no coeficiente angular, a partir da movimentação do ponto de tangência (e, consequentemente, da reta tangente) no gráfico da função, uma vez que o software Geogebra possui recursos que permitem esse dinamismo. Com base na visualização e na experimentação é possível estabelecer relações entre o coeficiente angular dessa reta e o comportamento de cada função, ou seja, identificar, por exemplo, intervalos de crescimento e decrescimento da função.

No sentido em que estamos considerando, o ensino das ideias intuitivas do cálculo pode ser uma ferramenta valiosa na aprendizagem de diversos conteúdos do Ensino Médio.

> O Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos. É perfeitamente possível, em uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a de derivada de uma função. (ÁVILA, 1991, p. 4)

O terceiro problema gerador das ideias fundamentais do cálculo é o da área. O aluno na primeira série do Ensino Médio, com seus conhecimentos geométricos, é capaz de calcular áreas de figuras planas regulares como retângulos, quadrados, triângulos, trapézios e círculos.

Algo curioso, talvez desafiador, nessa etapa seria propor a esse aluno que efetuasse o cálculo de áreas de regiões irregulares, como por exemplo, regiões curvas limitadas pelo gráfico de uma função em um determinado intervalo.

Apesar disso, se o estudante já teve contato com a ideia de aproximação ao trabalhar com a noção intuitiva de limites, pode-se aproveitar esse fato e introduzir a ideia de aproximação da área desejada pela soma de áreas menores, constituídas por figuras geométricas já conhecidas. Na verdade, de acordo com Anton(2000), esse procedimento para o cálculo da área, remonta à história da matemática, uma vez que esse foi o processo adotado por Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) que calculou corretamente a área sob uma parábola utilizando o *método de exaustão*. Nesse mesmo sentido, Simões(2012) escreve que Arquimedes preencheu a área que desejava calcular com um número crescente de triângulos e percebeu que a soma das áreas desses triângulos se aproximava cada vez mais de um valor na medida em que o número de triângulos aumentava.

A ideia intuitiva para o cálculo de áreas aplicado por Arquimedes é o processo que pode ser utilizado no Ensino Médio, o qual introduz o conceito de integral:

> Para calcular a área sob o gráfico, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia da área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos. (MACHADO, 2008, p.3)

Na sequência desse texto o autor complementa: “Integrar é juntar esses pedaços” (Ibid., p.3). Utilizando o mesmo ponto de vista, a Revista Cálculo na reportagem especial “Cálculo sem pressa é bom”, destaca, em uma linguagem informal, a ideia intuitiva do processo de integração:

> Integração é isso: se o estudante precisa achar a área de uma figura geométrica cheia de curvas, ele fatia a figura, substitui cada fatia por um retângulo (isto é, substitui cada fatia por uma figura cuja área é fácil de calcular), e soma todas as fatias. Conforme o número de fatias aumenta, a área de todos os retângulos somados se aproxima da área real; conforme o número de fatias tende ao infinito, a área de todos os retângulos somados tende à área real exata. (SIMÕES, 2012, p.32)

Assim, através da visualização do gráfico de determinada função, é possível fazer com que os estudantes identifiquem a região a qual se deseja aproximar a área e efetuem o seu cálculo como indicado acima. Dessa forma intuitiva o conceito de integral pode ser trabalhado na educação básica de modo a ampliar os conhecimentos dos alunos em relação à aplicabilidade da matemática. Afinal, nos problemas reais envolvendo o cálculo da área de uma plantação, por exemplo, dificilmente a região considerada será exatamente uma figura geométrica regular, sendo que o processo de aproximação pode auxiliar nesse cálculo.

A partir das colocações acima, podemos retomar o questionamento inicial: limites, derivadas e integrais são assuntos viáveis ao entendimento de um aluno do Ensino Médio? Se considerarmos as ideias intuitivas, através dos problemas geradores desses conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, como apresentado acima, acreditamos que a resposta seja afirmativa. Alguns estudantes poderão apresentar dúvidas, mas dificuldades em Matemática sempre existiram, e cabe ao professor propor esse desafio aos estudantes do Ensino Médio. Além disso, também é responsabilidade e dever do professor proporcionar aos estudantes diferentes alternativas para que alcance seus objetivos de aprendizagem, como por exemplo, com a utilização de um recurso computacional de visualização, que é o caso do software Geogebra, proposto nesse trabalho.

3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

3.1 Considerações Iniciais

As dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Superior nas disciplinas iniciais de Cálculo constituem o tema gerador para o surgimento da proposta desse trabalho. Diante dos diversos textos analisados tais como Rezende (2003), Ávila (1991, 1993, 2006), Duclos (1992), Machado(2008) e dos estudos na disciplina de MA 22 – Fundamentos de Cálculo, durante o primeiro semestre de 2012 no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, verificou-se a necessidade e a possibilidade da inserção das ideias intuitivas de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio.

A inserção dos conceitos fundamentais de Cálculo nessa fase da escolaridade relaciona-se com a possibilidade de trabalhar com que envolvem processos infinitos de aproximação, os quais podem ser explorados em vários conteúdos do Ensino Médio. Além disso, esses temas possuem grande aplicabilidade em problemas reais que podem ser tratados juntamente com o estudo de funções. Um caso particular é a aplicação dos conceitos de limites, velocidade média, velocidade instantânea e cálculo da área de regiões do plano limitadas por curvas, com base no estudo do gráfico e de situações-problema envolvendo as funções quadráticas.

3.2 Objetivos

O objetivo principal das atividades que foram propostas aos estudantes, durante o desenvolvimento desse trabalho, referia-se à possibilidade e a necessidade de se trabalhar com as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, aliado ao Estudo das Funções Quadráticas, utilizando o software Geogebra como recurso computacional. O trabalho foi organizado com atividades que possibilitavam ao estudante a experimentação e a visualização com a utilização dos diversos recursos do software utilizado, tais como o opção Seletor, a visualização e a construção de uma reta tangente ao gráfico de uma função e as opções “Soma Superior” e “Soma Inferior” para a aproximação e o cálculo de áreas de regiões limitadas do plano,

Com as atividades propostas os alunos puderam:

- Manipular o software GeoGebra (sua sintaxe, bem como utilizar algumas de suas funções);
- Construir gráficos de funções de 1º e 2º graus, utilizando o aplicativo e identificar as principais características de cada gráfico, através da mudança dos parâmetros adotados na lei de cada função.
- Calcular e interpretar o coeficiente angular de uma reta, como razão entre as variações dos valores de *y* e *x*;
- Visualizar e interpretar geometricamente o domínio e a imagem de uma função de 2ºgrau;
- Analisar a imagem de uma função quadrática nas proximidades de um ponto dado;
- Analisar o comportamento da imagem de uma função quadrática quando os valores de *x* crescem ou decrescem ilimitadamente;
- Analisar intuitivamente, o limite de uma sequência e o limite da soma dos termos de uma sequência de números reais, identificando quando a sequência converge ou diverge;
- Revisar o conceito de velocidade média em um intervalo de tempo e aproximar o cálculo da velocidade instantânea através da obtenção de intervalos cada vez menores;
- Compreender o significado de variação média num intervalo do domínio da função, através do cálculo do coeficiente angular da reta que passa pelos pontos da função referente aos extremos de cada intervalo considerado;
- Visualizar o significado de reta tangente ao gráfico de uma função quadrática;
- Relacionar o sinal do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função com a definição de função crescente ou decrescente em certo intervalo do seu domínio e identificar o ponto de máximo ou mínimo da função quadrática.
- Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função quadrática em um ponto dado.
- Estender o conceito do cálculo da área de figuras planas regulares, para regiões delimitadas por gráficos de funções, no caso, funções de 1º e 2º grau;
- Aproximar a área de uma região limitada, abaixo da curva do gráfico de uma função e acima do eixo OX, através da soma da área de retângulos inscritos e circunscritos à região.

- Resolver problemas envolvendo a área de regiões delimitadas por gráficos de funções contínuas e positivas em um intervalo do domínio dessas funções.

3.3 Encaminhamentos metodológicos

As atividades que foram propostas nesse trabalho se direcionam a alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Nesta etapa da escolaridade, na área de matemática, os alunos passam a ter contato mais direcionado com conteúdos que possuem grande aplicabilidade nos problemas da vida cotidiana. É justamente nesse momento, aliado ao estudo de funções, que podem ser apresentadas atividades exploratórias que estimulem a curiosidade e a atenção do estudante, de modo a dar significado ao conteúdo matemático.

Dessa forma, acredita-se que as atividades que foram sugeridas podem ser desenvolvidas logo após o trabalho de alguns temas em sala de aula. Por exemplo, uma sugestão é construir gráficos de funções de 1º e 2º graus utilizando o software Geogebra e identificar as principais características de cada gráfico através da mudança dos parâmetros adotados na lei de formação de cada função de modo que o trabalho com o Software sirva como complementação de seu aprendizado.

A partir disso, é possível apresentar ao estudante problemas que exijam o cálculo e a interpretação do coeficiente angular de uma reta e é possível fazer com que, através do recurso computacional, o aluno relacione o conceito de reta crescente e decrescente com esse coeficiente angular. Além desse encaminhamento para o desenvolvimento adequado das atividades, sugere-se mesclar atividades em sala de aula com outras no laboratório de informática de modo a enriquecer o trabalho.

De acordo com isso, para a aplicação das atividades desse trabalho, foram organizados cinco encontros presenciais de quatro horas cada um, totalizando 20 (vinte) horas. As atividades foram aplicadas no laboratório de informática educativa da Escola Municipal de Ensino Fundamental Francisco Zilli, do município de Flores da Cunha – RS, nos dias 7, 14, 21 e 28 de novembro de 2012 e o encontro para aplicação das atividades complementares de avaliação e do questionário final ocorreu no dia 5 de dezembro de 2012. Além disso, ainda no mês de setembro, foram efetuados os primeiros contatos com os alunos participantes do trabalho.

Nessa ocasião, foram convidados por contato telefônico, todos os ex-alunos da oitava série da escola Francisco Zilli que foram aprovados para o Ensino Médio no final do ano de 2011. De um total de 19 alunos que foram contatados, 14 aceitaram participar dessa atividade, sendo que os demais alunos trabalhavam ou faziam algum tipo atividade esportiva no dia e horário pré-determinado para os encontros, que os impossibilitaram de participar.

Antes dos encontros, os estudantes receberam e seus responsáveis legais assinaram o termo de confidencialidade e sigilo com as informações acerca do trabalho que estaria sendo desenvolvido. Esse termo deixava em destaque que as atividades que seriam desenvolvidas fariam parte dessa dissertação. O termo destacava também que o nome e demais informações que pudessem identificar os participantes seriam preservados. Portanto, na análise apresentada nas próximas páginas faz-se referência aos alunos participantes através dos códigos A_1 a A_{14}, considerando, por exemplo, que ao utilizar a referência A_5 está se indicando o aluno 5.

Para o bom andamento e compreensão do trabalho proposto é necessário que o estudante tenha domínio de alguns conceitos fundamentais da matemática, entre eles o significado de uma função, como identificar pontos pertencentes ao seu gráfico e a própria intuição acerca do traçado do gráfico a partir da lei da função dada, especialmente de funções quadráticas.

Destaca-se que na aplicação das atividades, em função da disponibilidade dos alunos da turma experimental que foi montada, não foi possível efetuar esse trabalho em etapas, sendo que a aplicação das atividades se deu de forma conjunta, quando os estudantes já haviam concluído seus estudos acerca das funções quadráticas, e essa foi uma das dificuldades previstas, pelo trabalho, no momento da elaboração do roteiro de atividades. Para contornar esse problema, foram propostos atividades de revisão de conceitos para posterior introdução das novas ideias relacionadas com o tema principal.

Outra dificuldade que estava prevista, refere-se ao não conhecimento prévio por parte dos estudantes, do software, de modo que a sua sintaxe poderia gerar dúvidas e prejudicar o desenvolvimento dos conceitos necessários, para a introdução das noções intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no curto espaço de tempo que estava programado para a aplicação das atividades. De modo a minimizar essa dificuldade, na primeira tarde de encontro com os estudantes, de acordo com a proposta desse trabalho, o roteiro de atividades buscava basicamente introduzir os comandos necessários para a utilização do software. No caso da aplicação em uma turma regular, também se deve considerar esse fato e aplicar as atividades introdutórias para que os estudantes se familiarizem com a sintaxe e o funcionamento do Geogebra, antes do aprofundamento relativo ao estudo das funções desejadas.

Um aspecto relevante das atividades elaboradas é a possibilidade de adaptar os roteiros sugeridos e aplicá-los às demais funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio, tais como as logarítmicas e exponenciais. A noção de limites na proximidade de um determinado valor no domínio dessas funções, ou para valores tendendo ao infinito, em particular, poderiam ser exemplos intuitivos bastante esclarecedores acerca do significado do limite de uma função. Assim, é possível que o aluno compreenda, através da análise do gráfico, da mesma forma como foi proposto para as funções quadráticas, intuitivamente outros limites, que também forneçam informações relevantes acerca do comportamento gráfico de algumas funções, como por exemplo, que:

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$$

ou, que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$$

Com base nesses aspectos, apresentamos a seguir a análise da aplicação das referidas atividades, as quais foram elaboradas e aplicadas com o intuito de verificar a possibilidade de inserção das ideias do Cálculo Diferencial e Integral aliado ao estudo de funções no Ensino Médio com auxílio do Software Geogebra. Os roteiros que contêm as atividades propostas encontram-se nos anexos desse trabalho. Acredita-se que o assunto é de fundamental relevância para a melhoria do ensino e da aprendizagem de matemática e para oferecer aos estudantes, uma base matemática mais consistente, baseada na experimentação, na visualização e na aplicação dos conteúdos.

4. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

4.1 A fase inicial: organização da turma experimental

As atividades propostas nesse trabalho com o objetivo de introduzir as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio com o auxílio do software Geogebra, foram planejadas para aplicação a uma turma experimental de alunos do primeiro ano da etapa complementar da Educação Básica. Para que a aplicação das mesmas fosse possível, dentro do tempo disponível para a elaboração e execução desse trabalho, as atividades foram organizadas na sequência de quatro roteiros, seguido de uma atividade complementar de avaliação. O ideal para alcançar de fato, os objetivos propostos seria aliar essas atividades ao estudo das funções quadráticas, que acontece, na escola onde estudam os alunos que participaram dessa atividade, por volta do final do primeiro trimestre do ano letivo, porém como isso não foi possível, em função da limitação de tempo, buscou-se uma alternativa para aplicar e avaliar o entendimento dos alunos acerca das atividades sugeridas.

Os estudantes mesmo sem ter efetivo conhecimento sobre o que iriam fazer nos encontros, demonstraram desde o início muito entusiasmo por terem sido convidados para esse trabalho. No primeiro encontro a expectativa dos estudantes era grande. Nessa oportunidade os estudantes conheceram o principal objetivo do desenvolvimento daqueles encontros presenciais: eles juntos, constituíam uma amostra de alunos do 1º ano do Ensino Médio, que resolveriam, com orientação da professora, roteiros de atividades intuitivas de cálculo, baseadas na exploração de funções quadráticas com auxílio de um software matemático, o Geogebra.

Dessa forma, na sequência deste trabalho, será analisado o entendimento, por parte desses estudantes, dos conceitos intuitivos de limites, velocidade média e velocidade instantânea e o cálculo da área de regiões do plano limitada por curvas. Como já destacado anteriormente esses são os conteúdos fundamentais ao entendimento das ideias básicas do Cálculo Diferencial e Integral, uma disciplina integrante do currículo do Ensino Superior nos cursos relacionados principalmente, com as ciências exatas e tecnologias.

Merece destaque ainda, o fato da grande disponibilidade dos estudantes de virem até a sua antiga escola (uma vez que a Escola Francisco Zilli somente atende ao Ensino

Fundamental) para realizarem um “*minicurso”* de matemática abordando tópicos de estudos sobre funções lineares e quadráticas, no laboratório de informática.

O desafio foi aceito pelos estudantes, que foram assíduos e demonstraram, durante os encontros, bastante interesse no desenvolvimento e, principalmente, atenção às explicações e orientações do material impresso. A pergunta que resta e será respondida nas páginas seguintes é: será que, a partir dessas colocações, os objetivos de aprendizagem foram alcançados?

4.2 Perfil dos estudantes participantes

A turma experimental foi composta por 14 estudantes, 6 meninas e 8 meninos, com idades entre 14 e 16 anos. Para conhecer um pouco mais sobre os alunos participantes, foi solicitado que respondessem um questionário inicial (Anexo F). As perguntas elaboradas buscavam conhecer o perfil dos estudantes e suas relações com a disciplina de matemática.

Sobre o relacionamento desses estudantes com a disciplina de Matemática, eles identificaram entre os diferentes tipos de exercícios propostos nessa disciplina, qual das alternativas apresentadas trazia o tipo de atividade que cada um preferia resolver. Entre os 14 alunos, 12 demonstraram preferir exercícios que exigem a aplicação de fórmulas, com base em exemplos já resolvidos. Entre as justificativas para essa escolha, podemos destacar a preferência por essa opção, justamente pela facilidade proporcionada pela resolução desse tipo de exercício sem, no entanto, o compromisso com uma aprendizagem baseada na aplicação dos conteúdos estudados.

A_3: *“Pois se apresentar a fórmula o erro é menos provável”.*

A_4: *“Acredito que a utilização de fórmulas é interessante e uma forma mais fácil de chegar ao resultado”*

A_5: *“Pois é muito mais fácil aplicar as fórmulas já estudadas em sala de aula”.*

A_{13}: *“Pois posso ver uma já feita e depois fazer”.*

A_1: *“Com o auxílio das aplicações das fórmulas é mais fácil de resolver o cálculo desejado”.*

A_{10}: *“Pois, exigindo a aplicação das fórmulas, permitem que memorizemos as fórmulas, e façamos corretamente os exercícios propostos”.*

As falas acima denunciam talvez, o que possa ser um dos problemas da matemática: a falta de leitura, interpretação e aplicação dos conteúdos desenvolvidos em sala de aula em situações-problema. Além disso, fica em evidência o fato de que os estudantes se referem à matemática como uma ciência que exige memorização e repetição, uma vez que preferem exercícios que tenham exemplos resolvidos e a utilização de fórmulas prontas, ou seja, a simples repetição de ideias.

Sobre os conteúdos trabalhados até o momento no primeiro ano do Ensino Médio, a maioria dos alunos (10 estudantes) respondeu que estava acompanhando e entendendo os conteúdos desenvolvidos na série, afirmando conseguir fazer as atividades e exercícios que eram propostos nas aulas, os demais apresentaram algumas dificuldades de entendimento "das contas" e "dos desenhos" (A_3) e no entendimento das explicações da professora (A_{14}).

Mais especificamente sobre o estudo das funções lineares, os estudantes foram questionados sobre a relação do coeficiente angular da reta e o gráfico desse tipo de função. Nesse tópico, de grande interesse para o desenvolvimento desse trabalho, 8 alunos responderam que não lembravam do significado do coeficiente angular da reta, 5 responderam que não estudaram esse conteúdo e 1 aluno assinalou que havia estudado esse tópico, porém fez referência às funções quadráticas: "*Sim, das parábolas no plano cartesiano*." (A_3).

Podemos observar que esse dado já indica a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre funções, de modo a incluir a visualização e a experimentação, bem como, a aplicação desses conceitos em situações-problema, para favorecer o efetivo aprendizado desses tópicos. Observa-se, portanto, que o ensino de funções ainda está muito relacionado com a obtenção de pontos e, a partir deles, o traçado do gráfico, sem que se tenha uma preocupação maior acerca do comportamento do gráfico, de acordo com cada tipo de função e a interpretação dos coeficientes envolvidos na lei da função, que fornecem informações importantes para o aprendizado significativo desses conteúdos.

Na sequência, uma das perguntas do questionário era se os estudantes tinham, durante seus estudos sobre funções quadráticas ou funções de 2º grau, trabalhado com problemas de aplicação desse conceito. Nessa pergunta, 10 alunos responderam que não se lembravam disso e os outros 4 afirmaram que sim, porém, relacionaram isso com a utilização da fórmula de Bháskara, escrevendo: "*Lembro que trabalhamos com a fórmula de Bháskara*."(A_4), ou ainda, "*Em alguns casos, era necessário aplicar a fórmula de Bháscara.*"(A_1), mas não citaram efetivamente alguma aplicação da função em situações-problema como o cálculo da área de uma região retangular, cujos lados estavam expressos por leis que envolvem polinômios de 1º grau, ou ainda, a equação de um movimento da Física, entre outros exemplos possíveis.

A partir desses dados, verificou-se que é possível e necessário aliar ao estudo de funções, logo no 1º ano do Ensino Médio, atividades exploratórias que possibilitem aos estudantes a ampliação dos conceitos utilizados, através de problemas que envolvam a aplicação, a visualização e a experimentação.

Aprofundar o conhecimento dos estudantes sobre o comportamento de cada função é proporcionar a eles, muito mais do que a simples obtenção de pontos pertencentes ao gráfico de cada função é possibilitar ao estudante entender de forma ampla o comportamento geral do gráfico de cada função e suas alterações a partir de pequenas modificações provocadas na sua lei de formação. É possível que a partir de ações como esta, em longo prazo, o quadro de fracasso no ensino e aprendizagem de Cálculo possa ser revertido, ou minimizado, de acordo com os objetivos norteadores desse trabalho.

4.3 Metodologia de aplicação: organização e distribuição das atividades

Para a aplicação das atividades, os 14 alunos que aceitaram o convite formaram uma turma experimental. Essa turma se reuniu durante cinco encontros com duração de quatro horas cada, com a finalidade de realizar as 24 atividades propostas nos roteiros apresentados no anexo A neste trabalho, e para a resolução das 5 atividades complementares de avaliação.

O laboratório de informática da Escola Francisco Zilli, local em que ocorreram os encontros, havia à disposição dos estudantes: doze computadores e dois notebooks, além de uma televisão grande, ligada a um dos computadores. Os computadores estavam em bom estado de conservação e todos contavam com o software Geogebra instalado, e em funcionamento.

No primeiro encontro, os estudantes receberam as atividades selecionadas, divididas em quatro roteiros, bem como as orientações para o desenvolvimento de todo o trabalho. De modo geral, o roteiro continha todas as informações referentes à utilização do software Geogebra para o desenvolvimento de cada atividade. Após a construção, que era solicitada aos estudantes, eram manipulados os objetos construídos e em seguida respondiam aos questionamentos relativos a cada atividade. Sempre que necessário, questionavam sobre a utilização do software e sobre as atividades, as quais eram esclarecidas para toda a turma, utilizando a televisão para facilitar a visualização.

Antes de iniciar a resolução das atividades, em cada tarde, os estudantes recebiam orientações sobre os objetivos daquele encontro e sobre o que se pretendia explorar com as atividades naquele momento, além de exemplos da aplicação dos conceitos que seriam explorados. Os estudantes trabalhavam, de forma geral, individualmente, mas, por vezes, conversavam com seus colegas para relembrar algum conceito já estudado.

As atividades complementares de avaliação, realizadas no último encontro, no entanto, foram realizadas individualmente, com a utilização do software Geogebra, e sem a colaboração da professora responsável pelo trabalho. No primeiro encontro, os alunos demonstraram algumas dificuldades para entender a utilização do software, mas as mesmas foram superadas a partir do segundo encontro.

A assiduidade dos estudantes merece destaque, visto que todos participaram dos primeiros três encontros e, nos demais, ou seja, na quarta e quinta tarde de aplicação, somente duas alunas deixaram de comparecer, justificando suas faltas. Acompanhe nos quadros abaixo o cronograma do desenvolvimento das atividades e seus objetivos principais. As atividades na íntegra encontram-se em anexo conforme indicação em cada quadro abaixo.

DATA	**ATIVIDADES DESENVOLVIDAS**	**OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE**
07/11//2012	**ATIVIDADE 1**	➢ Marcar pontos no Geogebra, utilizando diferentes possibilidades.
	ATIVIDADE 2	➢ Traçar retas utilizando a sintaxe do Geogebra.
	ATIVIDADE 3 **(A)** **(B)** **(C)**	➢ Gerar gráficos das funções de 1º e 2º grau, utilizando a inserção de parâmetros variáveis através da opção Seletor do Geogebra; ➢ Rever as principais características do gráfico de cada função; ➢ Calcular e interpretar o coeficiente angular de uma reta; ➢ Analisar a concavidade de uma parábola;

Figura 9 - Quadro de objetivos das atividades apresentadas no Anexo A

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE
14/11/2012	**ATIVIDADE 4**	➢ Revisar e visualizar o domínio e a imagem de funções de 2º grau.
	ATIVIDADE 5 **(A)** **(B)**	➢ Analisar o comportamento de uma função de 2º grau nas proximidades de um ponto. ➢ Compreender o significado do limite de uma função quadrática para x tendendo a um valor, pela esquerda e pela direita.
	ATIVIDADE 6 **(A)** **(B)**	➢ Compreender o significado do limite de uma função quadrática, côncava para cima, para valores de x tendendo a $+\infty$ ou $-\infty$.
	ATIVIDADE 7 **(A)** **(B)**	➢ Compreender o significado do limite de uma função quadrática, côncava para baixo, para valores de x tendendo a $+\infty$ ou $-\infty$.
	ATIVIDADE 8	➢ Resolver outros exercícios para explorar o conceito de limite.
	ATIVIDADE 9 **(A)** **(B)** **(C)**	➢ Construir o conceito de sequência através de uma atividade envolvendo áreas. ➢ Explorar, intuitivamente, o conceito de convergência e/ou divergência de uma sequência; ➢ Determinar o limite de uma sequência quando convergente. ➢ Determinar o limite da soma dos termos da sequência de áreas que foi construída em (A).

Figura 10 - Quadro de objetivos das atividades apresentadas no Anexo B

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE
21/11/2012	**ATIVIDADE 10** **(A)** **(B)**	➢ Interpretar o significado da taxa de variação média e velocidade média; ➢ Calcular a velocidade média em um intervalo.

Continua

Continuação

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE
21/11/2012	**ATIVIDADE 11**	➢ Construir o significado, através de um exemplo, e calcular, por aproximação, a taxa de variação instantânea e a velocidade instantânea, considerando a equação do movimento de um objeto.
	ATIVIDADE 12 **(A)** **(B)**	➢ Compreender o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função quadrática em um ponto; ➢ Construir a reta tangente ao gráfico de uma função, a partir de um processo de aproximação de uma reta secante à posição tangente. ➢ Calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.
	ATIVIDADE 13 **(A)** **(B)** **(C)**	➢ Explorar o comportamento do gráfico da função quadrática, através da análise das variações de sinal no coeficiente angular da reta tangente, ao longo do domínio da função; ➢ Relacionar o sinal do coeficiente angular com intervalos de crescimento ou decrescimento da função quadrática; ➢ Aplicar as conclusões da atividade em outros exemplos de funções quadráticas.
	ATIVIDADE 14	➢ Resolver exercícios de aplicação envolvendo os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea.

Figura 11 - Quadro de objetivos das atividades apresentadas no Anexo C

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE
28/11/2012	**ATIVIDADE 15**	➢ Revisar o cálculo da área de figuras planas.
	ATIVIDADE 16	➢ Calcular a área de uma região limitada por uma função de 1º grau e o eixo OX em um intervalo [a,b] do domínio da função, utilizando o cálculo de áreas de retângulos e triângulos.
	ATIVIDADE 17	➢ Desafiar os estudantes para que indiquem uma forma de aproximar o cálculo da área de uma região curva limitada por uma função de 2º grau e o eixo OX em um intervalo [a,b] do domínio da função, a partir da visualização da região.
	ATIVIDADE 18 **(A)** **(B)** **(C)**	➢ Aproximar o valor da área da figura descrita na atividade anterior, para a função $f(x) = x^2$ no intervalo [0,4] utilizando os comandos “Soma Superior” e “Soma Inferior” do Geogebra; ➢ Aumentar o número de retângulos considerados e aproximar cada vez mais os valores obtidos da área real da região desejada.
	ATIVIDADE 19 **(A), (B) e (C)**	➢ Idem item anterior para a área da região limitada pelo eixo OX, pelo gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$ no intervalo [0,2].
	ATIVIDADE 20	➢ Questionar sobre a possibilidade de realizar a aproximação da área de uma região curva utilizando outras figuras geométricas;
	ATIVIDADE 21 **(A), (B) e (C)**	➢ Aproximar o valor da área da região limitada pelo eixo OX, pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 9$ no intervalo [1,4] .
	ATIVIDADE 22	➢ Calcular a área da região limitada por duas funções em um intervalo [a,b], ➢ Determinar a área da região limitada pelos gráficos das funções: $f(x) = x + 6$ e $g(x) = x^2$.

Continua

Continuação

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE
28/11/2012	**ATIVIDADE 23**	➢ Determinar a área da região limitada pelos gráficos das funções $g(x) = x^2 - 4x + 4$ e $f(x) = 4$.
	ATIVIDADE 24	➢ Determinar a área da região limitada entre as curvas: $f(x) = 8 - x^2$ e $g(x) = x^2$.

Figura 12 - Quadro de objetivos das atividades apresentadas no Anexo D

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE
05/12/2012	**ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1**	➢ Avaliar o entendimento dos estudantes sobre o cálculo do limite de uma função quadrática, para x tendendo, pela direita e pela esquerda, a um valor do domínio da função.
	ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2	➢ Calcular o limite de uma função quadrática para x tendendo a $+\infty$.
	ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3	➢ Calcular o limite de uma função quadrática para x tendendo a $-\infty$.
	ATIVIDADE COMPLEMENTAR 4	➢ Aplicar os conceitos de velocidade média, e aproximação da velocidade instantânea considerando a equação do movimento de um objeto; ➢ Explorar o comportamento do gráfico, seus intervalos de crescimento e decrescimento, a partir da análise do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função.

Continua

Continuação

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	OBJETIVOS PRINCIPAIS DE CADA ATIVIDADE
05/12/2012	**ATIVIDADE COMPLEMENTAR 5** **(A)** **(B)** **(C)**	➢ Determinar a área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico da função $f(x) = -x^2 + 9$ e pelas retas verticais x = 0 e x = 3. ➢ Aproximar a área da região utilizando os comandos "Soma Superior", "Soma Inferior" do Geogebra;

Figura 13 - Quadro de objetivos das atividades apresentadas no Anexo E

Como instrumento de coleta de dados da aplicação, foram utilizados os roteiros apresentados em anexo, impressos, encadernados e entregues aos estudantes. Esse material continha a descrição de todas as atividades e o passo-a-passo para a utilização dos recursos do Geogebra necessários em cada etapa. Além disso, como é possível observar nos anexos, o material continha também, perguntas para que os alunos respondessem com base na visualização de cada construção feita no software, explorando o caráter dinâmico desse recurso computacional.

Esse material era recolhido ao final de cada encontro e devolvido ao estudante no início do encontro seguinte, de modo a não permitir intervenções externas no desenvolvimento do trabalho. Em muitas das atividades que exigiam construções e análise posterior, os alunos eram orientados a salvar seus arquivos em uma pasta denominada "Geogebra", que estava disponível no servidor geral do laboratório.

Além desses registros, os estudantes também responderam a dois questionários: o primeiro (Anexo F), com o objetivo de conhecer o perfil dos estudantes que estavam compondo a turma experimental e o outro, aplicado após a avaliação final (Anexo G), com intuito de questioná-los acerca do desenvolvimento das atividades, da organização do material impresso, da utilização do Geogebra e sobre seus aprendizados com as atividades propostas.

A descrição da organização, da distribuição e dos objetivos das atividades, apresentada nos quadros acima, deixa em evidência a proposta desse trabalho: a inserção das ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio com o auxílio do software Geogebra. De uma forma orientada e focada na experimentação aliada à visualização, as atividades apresentadas exploram os três problemas geradores do cálculo: o problema da velocidade instantânea, o problema da reta tangente e o problema da área, todos utilizando processos infinitos de aproximação, ou seja, utilizando o conceito de limite.

Os resultados mais detalhados da experiência da aplicação dessas atividades serão apresentados a seguir. Apesar disso, já se pode citar, neste momento, que os resultados sugerem que é possível inserir tais ideias aliadas ao estudo de funções quadráticas e também propor atividades semelhantes e aplicá-las às demais funções estudadas no primeiro ano da etapa complementar da Educação Básica. Destaca-se que essa proposta se destaca dos modelos usuais de ensino dos mesmos conteúdos pela possibilidade de trabalhar esses conceitos utilizando o Software Geogebra, o que permite maior dinamismo e uma análise crítica de situações-problema envolvendo algum tipo de variação, pela possibilidade da inserção e variação de parâmetros disponíveis nesse aplicativo.

É possível, portanto, propor aos estudantes nesta fase de sua escolaridade, um estudo mais direcionado acerca do comportamento dos gráficos das funções, através de atividades que explorem os conceitos de limites, reta tangente e análise do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de cada função (o que, em cursos de cálculo, chama-se derivada). O trabalho com áreas e volumes, também pode ser facilitado, utilizando a ideia de aproximação, como pode ser verificado no desenvolvimento dessas atividades, introduzindo assim, a ideia intuitiva de integral definida.

5. ANÁLISE DE RESULTADOS

Após a aplicação das atividades, da avaliação e do questionário final, todos os registros feitos pelos estudantes nos materiais disponibilizados foram recolhidos para a análise dos resultados. Nesta etapa, o interesse devia se voltar a avaliar o desempenho dos estudantes nas atividades aplicadas, deixando em evidência se os objetivos estabelecidos foram alcançados. Dessa forma, na sequência desse trabalho, se fará referência a cada atividade, destacando o que se esperava de cada uma e as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante a aplicação do roteiro.

5.1 Roteiro de atividades – Parte 1

De uma forma geral, o objetivo das três atividades apresentadas no primeiro roteiro (Anexo A), é apresentar o software Geogebra aos alunos e orientá-los para a utilização de suas principais funções, utilizando as janelas algébrica e gráfica e alguns dos recursos disponíveis nos botões da barra de ferramentas da tela inicial do programa.

Aliado a esse intuito, pretendia-se também revisar as características principais dos gráficos das funções de 1º e 2º grau, como calcular e interpretar o coeficiente angular de uma reta e analisar a concavidade de uma função quadrática, em relação ao parâmetro "$\boldsymbol{a}$" na lei de formação de uma função quadrática do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$.

5.1.1 Explorando recursos do Geogebra: Funções de 1º e 2º grau

O Geogebra é um software livre e gratuito, com inúmeras possibilidades de trabalho e aplicações na matemática. É um recurso dinâmico, além da construção e visualização dos diversos entes matemáticos, permite a inserção de parâmetros e a variação desses parâmetros de forma a possibilitar, por exemplo, uma análise crítica de diversos problemas que envolvem algum tipo de variação. Além disso, é um recurso computacional poderoso, pois permite aliar o estudo da álgebra, geometria euclidiana e analítica e o cálculo.

As atividades que analisaremos agora abordaram os principais recursos do Geogebra relacionados ao estudo de funções, principalmente as funções lineares e quadráticas. A primeira atividade, resolvida logo após uma explanação sobre o software Geogebra e suas possibilidades de aplicação nas mais diversas áreas da matemática, orientava os estudantes para a inserção de pontos através de pares coordenados (x, y) de duas maneiras diferentes. A primeira inserindo-os diretamente na janela gráfica, selecionando a opção "*novo ponto*" e clicando no local do ponto desejado. A segunda indicava como inserir pontos digitando-os na barra de entrada de comandos. Dessa forma, por exemplo, digitando *C=(2,4)* seria inserido o ponto C de abscissa 2 e ordenada 4.

A segunda atividade utilizava os pontos marcados na atividade anterior, para indicar aos estudantes as diferentes possibilidades para inserir uma reta no software: diretamente na janela gráfica usando o recurso "reta definida por dois pontos" ou inserindo, por exemplo, o comando "*reta [D,E]* " na barra de entrada, de modo a traçar a reta que passa pelos pontos D e E, já inseridos anteriormente.

Nessas atividades introdutórias, os estudantes não demonstraram dificuldades ao manipular o Geogebra e utilizar sua linguagem, sendo que todos conseguiram fazer as construções, utilizar as propriedades para modificar as características de cada reta, como cor e espessura. Como exemplo, a figura abaixo apresenta um recorte da tela do Geogebra da construção feita pelo estudante A_4 nas atividades 1 e 2.

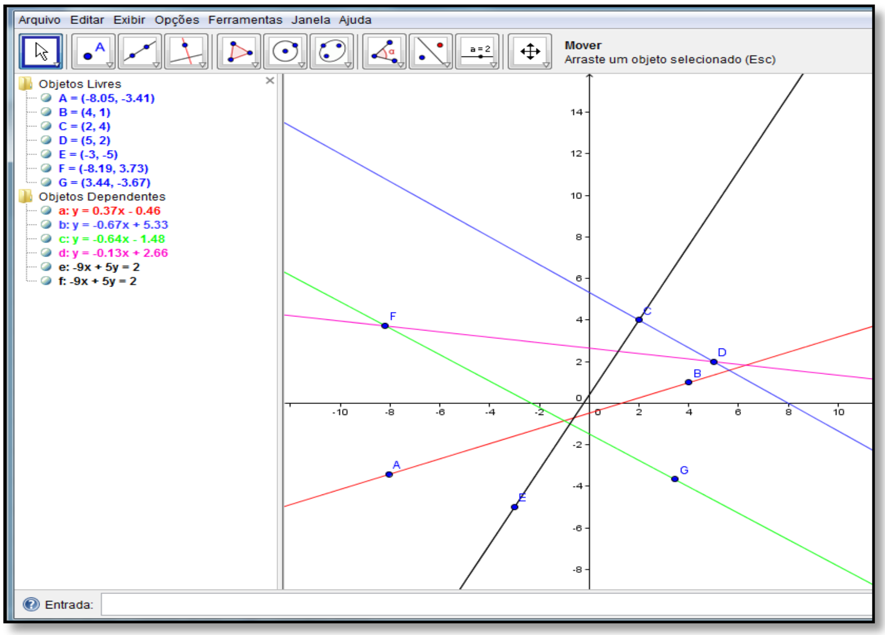


Figura 14 - Construções relativas às atividades 1 e 2 feitas pelo estudante A_4

Na conclusão das duas atividades acima, procurou-se saber se os alunos sabiam a justificativa matemática para o fato de cada uma das retas traçadas serem determinadas exatamente por dois pontos. Para essa questão, todos os alunos destacaram que com somente um ponto não é possível traçar uma reta, deixando em evidência a ideia de "unir pontos" para o traçado do gráfico, no caso, uma reta. Apesar disso, alguns estudantes destacaram a ideia de função como fundamentação para esse fato, como se pode notar nas falas em destaque:

"*Eu acho que para termos uma reta ela tem que passar por dois pontos, e sempre que temos uma função, fazendo todas as contas necessárias, a reta se encaixa nos pontos".* (A_5)

"Pois com um ponto a reta poderia ser para qualquer direção, com dois pontos a reta tem que ser definida, pois ela vai direto de A para B". (A_{12})

"Pois com a sua função, com qualquer valor que você substituir, o ponto sempre se encaixará na reta traçada". (A_2)

Na terceira atividade, os alunos foram orientados a traçar gráficos de funções de 1º e 2º grau, utilizando o recurso "*Seletor*" do Geogebra, que possibilita a inserção de parâmetros e da lei de formação genérica de uma função, de modo a analisar o comportamento de seu gráfico na medida em que esses parâmetros fossem sendo alterados.

Para gerar gráficos de funções do 1º grau, depois de trabalharem com um exemplo numérico, o gráfico da função $f(x) = 3x + 2$ na atividade 3(A), os alunos inseriram valores para os parâmetros $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ na lei de formação $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, de modo a analisar as alterações provocadas na reta a medida em que os parâmetros $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ eram modificados, respondendo aos questionamentos propostos na atividade.

A análise das respostas apresentadas destaca a relação entre o coeficiente angular da reta (o parâmetro $\boldsymbol{a}$) e a sua inclinação. Na questão referente à modificação provocada no gráfico da função na medida em que o parâmetro $\boldsymbol{a}$ era alterado e $\boldsymbol{b}$ era mantido fixo, destacam-se algumas observações. De acordo com A_2, *"Ela muda de direção conforme eu vou movendo o 'a', o ângulo da reta muda, ela pode passar de crescente para decrescente"*, ou ainda, para valores cada vez maiores do parâmetro $\boldsymbol{a}$, *"vai aumentando o ângulo e a inclinação*"(A_{11}). Nessa atividade os alunos conseguiram identificar corretamente quando o gráfico de uma função linear (ou afim) é constante, crescente ou decrescente, e também demonstraram saber o significado dos parâmetros envolvidos, inclusive, relacionando o parâmetro $\boldsymbol{b}$ com a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo OY, revisando o que já haviam aprendido no decorrer do ano em matemática.

No item seguinte dessa mesma atividade, trabalhou-se com acréscimos e decréscimos nas variáveis $y = f(x)$ e x da função $f(x) = ax + b$, de forma a analisar, através de exemplos, a partir de pontos pertencentes ao gráfico da função em cada caso, qual a relação dos mesmos com os parâmetros citados anteriormente. Os alunos foram orientados a fazer uma construção no Geogebra a partir da função $\boldsymbol{f(x) = 2x - 1}$, e a partir da determinação de dois pontos $A= (X_A\ , Y_A)$ e $B= (X_B\ , Y_B)$ do gráfico, calcular o coeficiente angular ($\boldsymbol{m}$) da reta como a razão entre a variação em y e em x, ou seja, $m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$. Observe, na figura 15, a construção indicada nessa atividade.

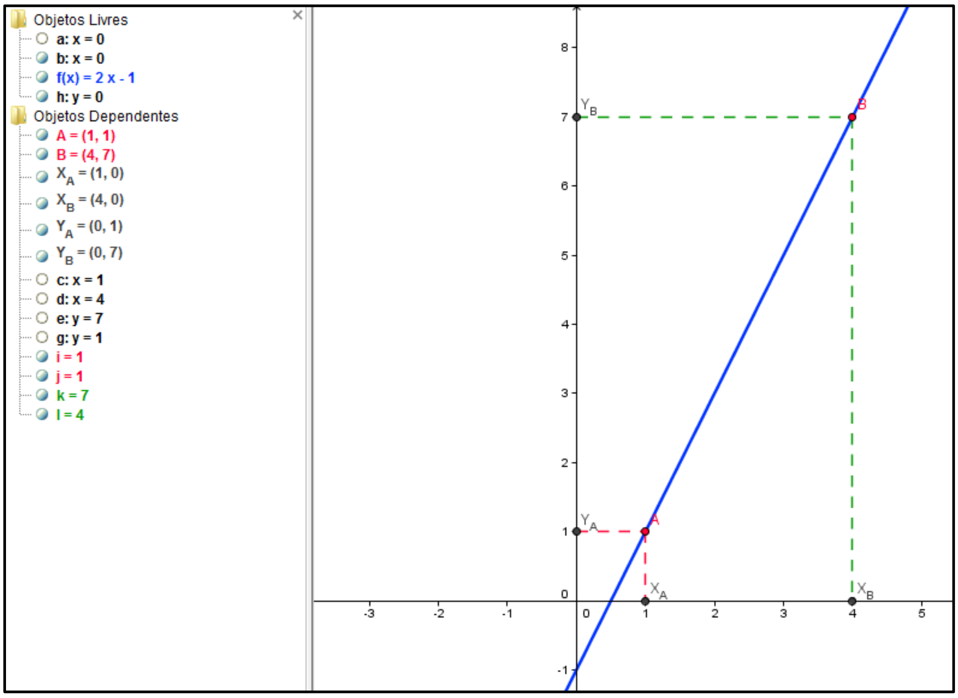
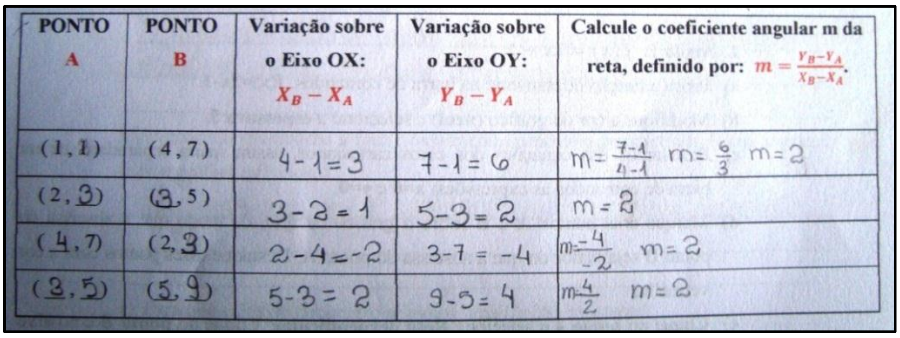


Figura 15 - Construção no software Geogebra orientada na atividade 3(A) para a função $f(x) = 2x - 1$.

Todos os alunos conseguiram efetuar os cálculos necessários de modo a obter, para todos os pontos analisados, o coeficiente angular dessa reta. Em seguida, os alunos conseguiram relacionar esse valor com o parâmetro "$\boldsymbol{a}$" da função, que era o objetivo principal dessa atividade. Como pode ser observado na Figura 16, que apresenta a tabela retirada do material do estudante A_4.

Além desse exemplo, os alunos também trabalharam com um segundo exemplo, a função $f(x) = -x + 2$, modificando a lei de formação na construção já feita, por essa nova e, também, concluindo corretamente acerca do coeficiente angular do gráfico dessa nova função.



PONTO A	PONTO B	Variação sobre o Eixo OX: $X_B - X_A$	Variação sobre o Eixo OY: $Y_B - Y_A$	Calcule o coeficiente angular m da reta, definido por: $m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$.
(1, 1)	(4, 7)	4-1=3	7-1=6	$m = \frac{7-1}{4-1}$ $m = \frac{6}{3}$ m=2
(2, 3)	(3, 5)	3-2=1	5-3=2	m=2
(4, 7)	(2, 3)	2-4=-2	3-7=-4	$m = \frac{-4}{-2}$ m=2
(3, 5)	(5, 9)	5-3=2	9-5=4	$m = \frac{4}{2}$ m=2

Figura 16 - Tabela preenchida por A_4 no exemplo 1 da atividade 3(A).

Dessa forma, percebe-se que os alunos conseguiram relacionar, através da visualização, esse tópico com seus estudos anteriores sobre funções de 1º grau, mostrando sim, já terem trabalhado, porém de outra forma, com a interpretação do significado do coeficiente angular de uma reta, diferentemente do que havia sido constatado pelo questionário inicial onde todos afirmaram não lembrar ou não ter estudado tal assunto.

Dando continuidade nas atividades, foram propostas questões de revisão e estudo das principais características de uma função quadrática. Do mesmo modo, o trabalho seguiu com a exploração de um exemplo numérico, para posterior estudo de funções desse tipo, a partir de sua lei de formação geral utilizando os parâmetros “$\boldsymbol{a}$”, “$\boldsymbol{b}$” e “$\boldsymbol{c}$”, ou seja, $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, também utilizando o recurso “*seletor*” do software. O objetivo aqui era analisar a concavidade da função e os pontos de intersecção do seu gráfico com os eixos cartesianos conforme mostra a figura 17.

Ao analisar as respostas dos alunos às perguntas elaboradas para explorar as mudanças no gráfico da função, provocadas pela alteração de cada um dos parâmetros “$\boldsymbol{a}$”, “$\boldsymbol{b}$” e “$\boldsymbol{c}$” adotados, os alunos conseguiram estabelecer as relações desejadas através da observação. No que se refere ao significado do parâmetro “$\boldsymbol{a}$” podemos destacar algumas respostas (que se repetiam) para as questões abaixo.

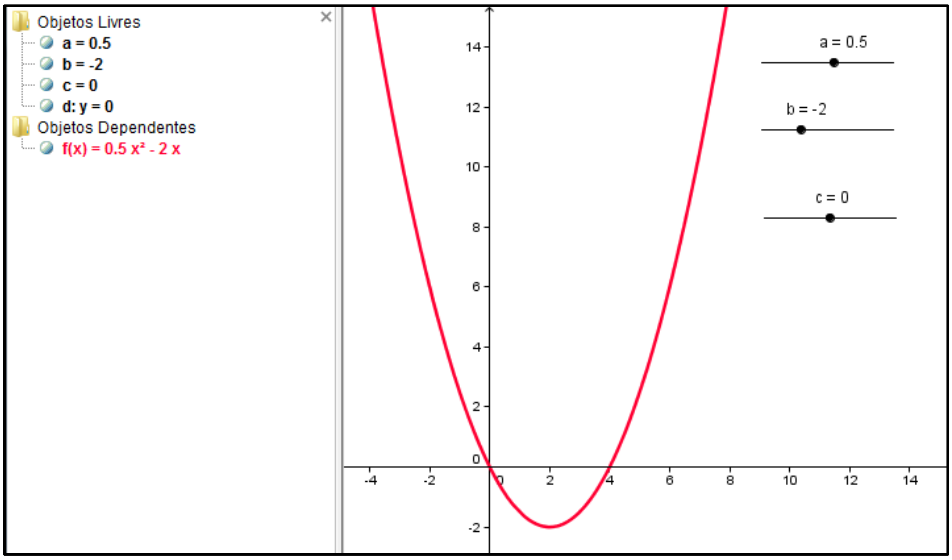


Figura 17 - Construção da atividade 3(B) feita por A_7.

a) Mantendo fixos os parâmetros "**b**" e "**c**" e movimentando o parâmetro "**a**", o que acontece com o gráfico da função?

"*Muda a concavidade da parábola para cima e para baixo". (A_8)*

"*Ocorre a alteração da concavidade (direção), para cima ou para baixo*". (A_2)

"*Quando fica negativo a parábola é pra baixo e se é positiva a parábola é pra cima*". (A_{14})

b) Mantendo fixos os parâmetros "***a***" e "***c***" e movimentando o parâmetro "***b***", o que acontece com o gráfico da função?

Nesse tópico, somente três alunos relacionaram corretamente o significado desse parâmetro, citando que o gráfico "se movimenta", mas que a intersecção com o eixo OY ocorre sempre no mesmo ponto, para cada valor do parâmetro "c" que estava fixo. Os demais alunos citaram apenas que a parábola se movimentava, não citando como isso acontecia.

"*O ponto de intercepção do eixo OY, está sempre no mesmo local*" (A_2)

"*A parábola continua igual e apenas se desloca interceptando o eixo y em um mesmo ponto*"(A_5)

"*Vai para os lados, mas nunca a parábola sai do 'c'*". (A_3)

c) Mantendo fixos os parâmetros "**a**" e "**b**" e movimentando o parâmetro "**c**", o que acontece com o gráfico da função?

Todos os alunos nessa questão relacionaram o parâmetro "**c**" com o deslocamento do gráfico na direção vertical, para cima ou para baixo, conforme destacamos algumas falas:

"Ele sobe e desce conforme o parâmetro "c" é movimentado".(A_9)

"Ele muda sua posição na vertical, tornando o termo "c" positivo ou negativo". (A_2)

"Muda a posição vertical do gráfico". (A_4)

Com as atividades sugeridas nesta etapa do trabalho, foi possível introduzir algumas das ferramentas e a sintaxe do software Geogebra. Os estudantes puderam revisar o que já haviam aprendido sobre funções e aprofundar seus conhecimentos acerca das variações dos parâmetros envolvidos em cada lei de formação, a partir da visualização. Dessa forma, acredita-se que os objetivos estabelecidos para estas atividades foram alcançados.

5.2 Roteiro de atividades – Parte 2

As atividades desenvolvidas pelos estudantes até a etapa anterior, apesar de utilizar alguns recursos diferentes em sua abordagem, exploravam conceitos que os alunos, de alguma forma já tiveram contato através de seus estudos anteriores. Nesta etapa, continuaremos a análise, a fim de verificar se os estudantes construíram um conceito fundamental em várias áreas da matemática: a ideia intuitiva de limite de uma função, especialmente aplicado à função quadrática e, além disso, o limite de uma sequência, quando este existe. As atividades analisadas encontram-se no Anexo B deste material.

5.2.1 O conceito de limite aplicado à função quadrática

A atividade 4, primeira desse roteiro, orientava os estudantes para a construção do gráfico da função $f(x) = x^2$, destacando no Geogebra com a opção "Habilitar rastro" o domínio e a imagem dessa função, como pode-se verificar na construção feita por A_7 na figura 18.

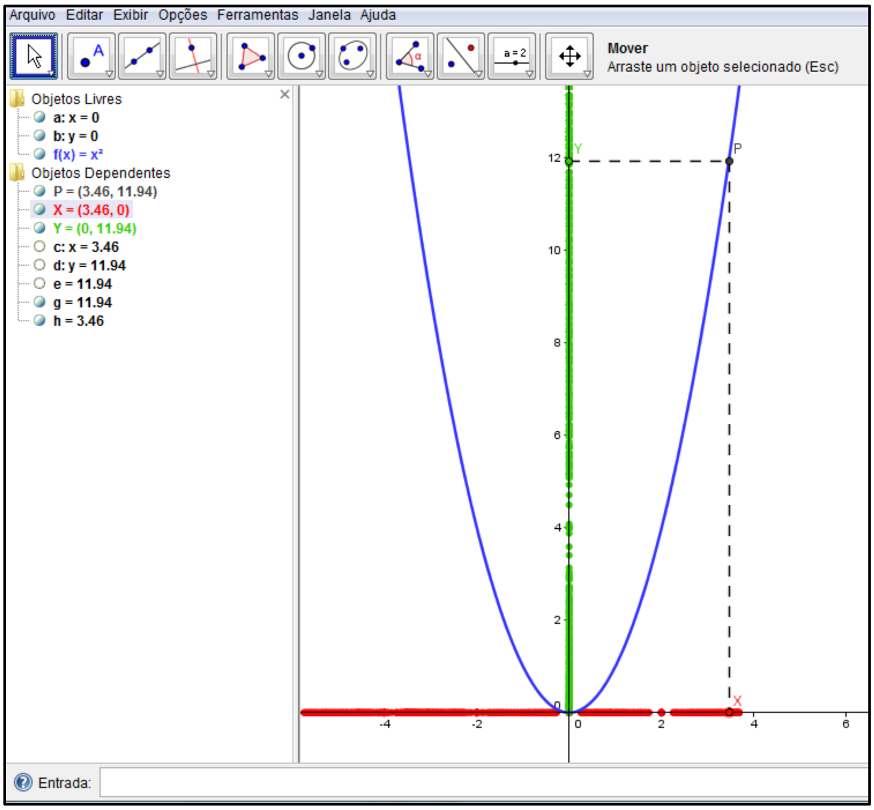


Figura 18 - Construção feita por A_7 para a Atividade 4 - O domínio e a imagem da função $f(x) = x^2$, a partir da movimentação do ponto X sobre o eixo OX.

Depois da construção, os alunos tinham sete questões para responder explorando o objeto construído. Nesses questionamentos os alunos mostraram identificar o “rastro” em vermelho, ao longo de todo o eixo OX como “*os possíveis valores que x pode assumir*” – conforme comentários em linhas gerais dos alunos A_{12}, A_{11}, A_7, A_2, entre outros -, sendo que nenhum aluno citou, especificamente, como domínio da função, mas sim seu significado geométrico. O “rastro” em verde, a imagem da função de acordo com os valores assumidos para *x*, foi identificado, pelos estudantes, através de seu significado algébrico: “no eixo OY ficam marcados, no rastro em verde, os quadrados dos números marcados no eixo OX” (A_4).

Os estudantes observaram nessa construção, que alguns pontos do eixo OX e OY não ficaram marcados, porém ao serem orientados a utilizar a função “zoom” puderam perceber que, na medida em que se aumentava o “zoom” o Software fornecia um “rastro” cada vez mais contínuo.

Essa atividade foi o ponto inicial para trabalhar com o conceito de limite de uma função nas proximidades de um ponto de seu domínio (Atividade 5). Na sequência, os estudantes preencheram todos corretamente, as tabelas propostas, como no exemplo abaixo conforme podemos visualizar nas figuras 19 e 20, com o objetivo de concluir sobre o limite da função $f(x) = x^2$ para valores de x se aproximando cada vez mais de 3, pela esquerda e pela direita.

PONTO	A	B	C	D	E	F	G
x	2	2.5	2.8	2.9	2.99	2.999	2.9999
$f(x)$	4	6,25	7.84	8,41	8,9401	8,994001	8,99940001

Figura 19 - Tabela de A_5 para concluir sobre o limite de $f(x)$ para x tendendo a 3, pela esquerda.

PONTO	H	I	J	K	L	M	N
x	4	3.5	3.2	3.1	3.01	3.001	3.0001
$f(x)$	16	12,25	10,24	9,61	9,0601	9,006001	9,00060001

Figura 20: Tabela de A_5 para concluir sobre o limite de $f(x)$ para x tendendo a 3, pela direita.

Essa atividade, além de servir para introduzir a ideia intuitiva de limite de uma função nas proximidades de um ponto, também possibilitou aos estudantes conhecer a simbologia para representar esse fato. Assim, concluíram nesta etapa a partir das orientações que:

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

Destaca-se que, neste trabalho, como o objetivo era introduzir as noções intuitivas do cálculo, aplicadas à função quadrática, e como as funções consideradas são todas contínuas, não está sendo dada, rigorosamente, a definição de limite, mas simplesmente está se abordando o significado do mesmo, aplicado a funções, em pontos, onde esse limite existe.

A atividade 5(B) propôs aos estudantes que da mesma forma, aplicassem essas ideias a outra função quadrática. Os estudantes precisavam calcular o limite da função $f(x) = x^2 - x + 1$ para x tendendo a 2. Nesse caso, os estudantes, precisavam indicar valores cada vez mais próximos de 2 para completar as suas tabelas e concluir acerca do limite solicitado. Todos os estudantes conseguiram realizar corretamente essa atividade, concluindo que

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 1) = 3.$$

Na complementação da atividade, os alunos precisavam fazer um esboço do gráfico da função que estavam considerando, com base na visualização no software, e indicar o significado geométrico do limite calculado. A ideia de aproximação estava presente em todos os esboços feitos, mas alguns com maior capricho e cuidado, como apresentado na figura 21.

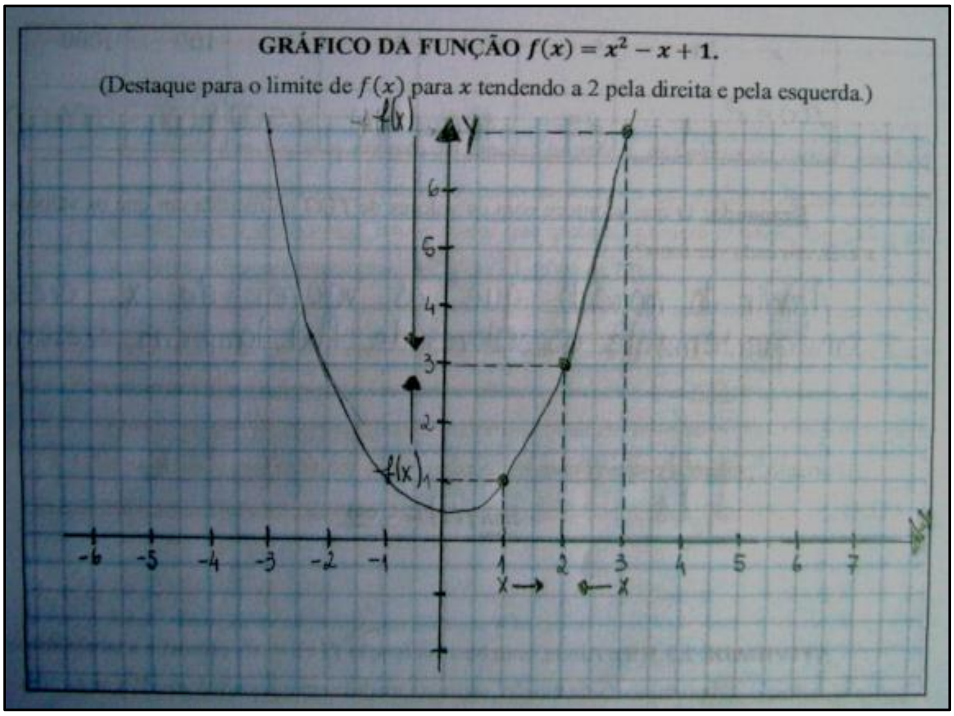


Figura 21 - Gráfico feito por A_2 para a atividade 5(B).

As ilustrações deixam em evidência o entendimento dos alunos sobre o significado de limite, ou seja, o processo infinito de aproximação: na medida em que os valores de x se aproximam cada vez mais de 2, tanto pela direita quanto pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 3.

Nas atividades 6(A) e 6(B) foi proposto aos estudantes o estudo do comportamento dos valores de $f(x) = x^2$, para valores cada vez maiores (ou cada vez menores) para *x*, introduzindo o conceito de limites infinitos. Todos os alunos apresentaram os cálculos e conclusões corretamente nesta atividade, compreendendo o significado das expressões abaixo:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

Para exemplificar, estão apresentadas abaixo algumas das justificativas dos estudantes para as duas questões apresentadas:

a) O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de *x* crescem cada vez mais?

"*São infinitos, vão crescendo cada vez mais*". (A_{10})

"*O valor de f(x) cresce cada vez mais na medida em que o x cresce*". (A_7)

"*Também vão crescendo cada vez mais*". (A4)

b) O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de *x* decrescem cada vez mais?

"*Vão aumentando cada vez mais*".(A_9)

"*Na medida em que os valores de x decrescem cada vez mais os valores de f(x) continuam aumentando*". (A_7)

"*Cada vez que x decresce, f(x) cresce cada vez mais*". (A_{12})

Da mesma forma, nas atividades 7(A) e 7(B) os estudantes analisaram o comportamento para os valores de $f(x) = x^2$, com valores cada vez maiores (ou cada vez menores) para *x*, e também todos os alunos apresentaram os cálculos e conclusões corretas, com exceção de dois, que não acrescentaram o sinal negativo nos resultados, apesar de justificarem corretamente, e um deles que confundiu-se com o sinal negativo da função, e efetuou incorretamente os cálculos, obtendo resultados positivos.

Dessa forma, pode-se afirmar que as expressões abaixo foram compreendidas:

$$\lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty.$$

Algumas das justificativas dos estudantes para as duas questões apresentadas, para a atividade 7, são as que seguem:

a) O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de *x* crescem cada vez mais**?**

"*Conforme os valores de x crescem, os valores de f(x) decrescem muito*". (A2)

"*Os valores de y decrescem*". (A_7)

"*Eles decrescem cada vez mais".* (A5)

b) O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de *x* decrescem cada vez mais?

"*Os valores de y vão decrescer também*".(A_8)

"*A partir do momento que os valores de x decrescem, os valores de f(x) decrescem*". (A_2)

"*Na medida em que os valores de x decrescem cada vez mais o valor de f(x) decresce*". (A7)

"*Eles aumentam cada vez mais, mas ficando com o sinal negativo*". (A_{10})

Os estudantes também exploraram outros três exemplos de funções, analisando o limite para *x* tendendo a um valor do domínio da função e para valores cada vez maiores ou menores, ou seja, seus limites no infinito. As anotações dos estudantes consideram a noção de aproximação infinita e valores infinitos (cada vez maiores ou menores).

Destaca-se que, apesar da aplicação de limites às funções quadráticas ser bastante simples e diretamente visível através do seu gráfico, ou até pela própria correspondência $(x, f(x))$ é importante introduzir essa análise logo no primeiro ano do Ensino Médio, de modo a levar os estudante a refletirem acerca do comportamento gráfico de uma função intuitivamente. Assim, esse gráfico pode ser esboçado com melhor convicção pelos estudantes ao relacionarem esses conceitos.

Acredita-se também que, ao trabalhar com outras funções, é possível inclusive analisar o comportamento assintótico de alguns gráficos como o de funções exponenciais e logarítmicas. Merece também destaque o fato do grande ganho em linguagem, simbolismo e conhecimento matemático que o estudante pode adquirir ao trabalhar dessa maneira mais direcionada. Considerando que limites é, na maioria das vezes, o primeiro assunto do curso de cálculo e já é, de fato, apresentado ao estudante nas primeiras aulas dessa disciplina, o trabalho intuitivo, aplicado a funções simples no Ensino Médio, pode representar um ganho razoável em aprendizado logo no início da vida universitária desses estudantes.

5.2.2 O conceito de limite aplicado a sequências numéricas

As sequências numéricas, especialmente as progressões aritméticas e geométricas, conteúdos do primeiro ano do Ensino Médio, também constituem uma oportunidade para explorar o conceito intuitivo de limites. Como já mencionado ao longo desse texto, é possível, por exemplo, compreender que os termos de uma progressão geométrica de razão positiva e menor que 1 (um) se aproximam cada vez mais de zero. Sendo assim, a partir do termo geral da progressão, podemos utilizar a simbologia e a notação para o cálculo do limite de uma sequência, da mesma forma que vínhamos utilizando até então para funções.

Além disso, para uma progressão geométrica com razão maior que 1 (em módulo), pode-se concluir que, como seus termos são cada vez maiores (em módulo), a medida em que aumentarmos o número de termos, a sequência não converge e tende ao infinito, positivo ou negativo, dependendo do primeiro termo e do sinal da razão da sequência considerada.

Esse conceito ainda pode ser ampliado para a análise da soma dos termos de uma progressão. A atividade 9 (incluída no Anexo B) buscou verificar o entendimento dos estudantes com o desenvolvimento dessas ideias através de exemplos.

Essa atividade sugere a construção de uma sequência de valores que representam áreas de quadrados e retângulos, construídos a partir de um quadrado de lado 1 (um) e, portanto, área total igual a uma unidade de área (1 u.a.) através de um processo recursivo onde, a partir da figura dada construímos a próxima, tomando para tanto, sempre a metade da área anterior. Os alunos foram orientados a fazerem tal construção e calcular as áreas de cada região que ficava determinada por cada etapa desse processo. Para tanto, precisavam fazer referência à área do quadrado inicial e encontrar uma relação entre os valores obtidos para as áreas das figuras menores.

Observe, na figura 22, a construção das áreas indicadas por a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6, através do processo descrito acima, feita pelo aluno A_9.

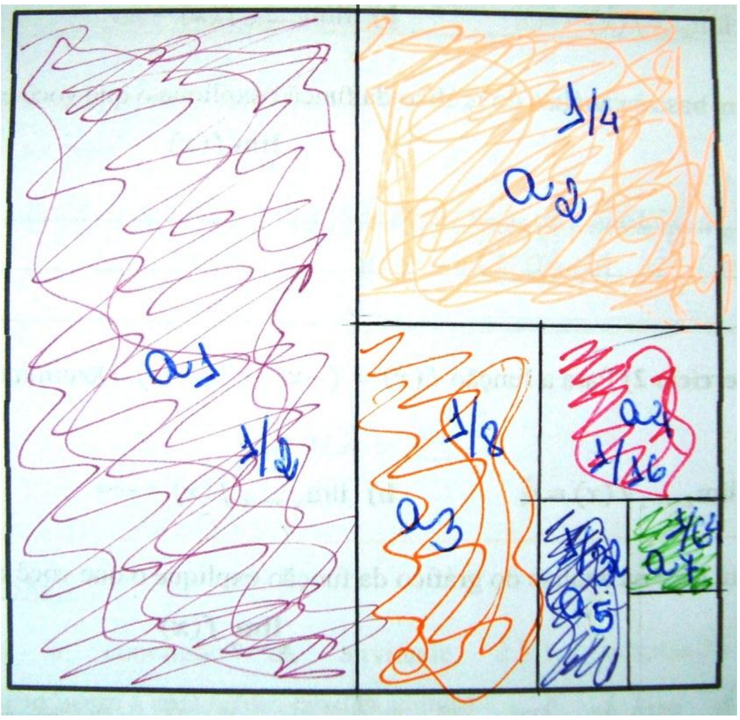


Figura 22 – Construção do aluno A_9 na Atividade 9 do Anexo B.

A principal intenção dessa construção era mostrar aos estudantes que esse processo é infinito, apesar de não ser possível traçar e visualizar muitas outras divisões no espaço em branco ainda restante. Na verdade, na medida em que se aumenta o número de divisões e de regiões obtidas, a área de cada uma dessas regiões é cada vez menor. Assim o conceito de limite está, mais uma vez, intimamente relacionado com esse processo infinito de aproximação.

Os estudantes também foram orientados a encontrar uma fórmula para o termo geral da sequência das áreas obtidas: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ e $\frac{1}{64}$. Os estudantes puderam perceber que na medida em que o processo continuava novos termos eram obtidos, bastando para isso considerar sempre a metade da área da região anteriormente determinada. Assim, é possível obter o termo geral dessa sequência:

$$\boldsymbol{a_n} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}} \quad \text{, ou ainda,} \quad \boldsymbol{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}} \text{ , } n \in \text{ N.}$$

Essa atividade, coincidentemente, foi trabalhada na semana em que os alunos começaram em suas turmas regulares, a estudar progressões geométricas (PG). A partir disso, os estudantes interpretaram o que acontecia com os termos da progressão na medida em que os valores de *n* aumentavam cada vez mais. Aqui, apenas um aluno respondeu equivocadamente, afirmando "*Os valores da sequência vão aumentando*"(A_2), os demais alunos indicaram que os valores tendiam a zero: "*Eles se aproximam cada vez mais do 0 (zero)"*(A_7).

Todos os alunos, mesmo o que tinha interpretado incorretamente o questionamento anterior completaram corretamente o valor do limite pedido, ou seja:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Como aplicação do conceito de limite de uma sequência, outros exemplos foram explorados. Conforme a tabela abaixo, podemos verificar que a maioria dos estudantes conseguiu determinar corretamente cada limite solicitado. Verifica-se, porém, uma maior dificuldade em relação ao segundo limite, uma vez que os estudantes que erraram a questão interpretaram incorretamente o termo geral da sequência, como se precisassem calcular $\lim_{n\to\infty}(-2)^n$. As justificativas dos três estudantes, que erraram essa questão, indicam esse fato, como, por exemplo, os alunos A_7 e A_{13}, que apesar de preencherem a tabela alternando valores positivos e negativos para as potências de (- 2) calculadas, ignoraram esse fato e consideram que os valores crescem (em módulo) cada vez mais: "*Eles vão ficando cada vez maiores*", de modo que apresentaram incorretamente o limite como $+\infty$. Já o aluno A_9 escreveu "*Aumentam cada vez mais, mas um número positivo e outro negativo*".

Tabela 8 – Conclusões da análise das atividades 9(A) e 9(B)

Termo Geral da Sequência	Cálculo do Limite	Quantidade de acertos
$\boldsymbol{a_n = 2^n}$	$\lim_{n\to\infty}(2^n) = +\infty$	**14 acertos**
$\boldsymbol{a_n = -2^n}$	$\lim_{n\to\infty}(-2^n) = -\infty$	**11 acertos**
$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{3n}}$	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n}\right) = 0$	**12 acertos**
$\boldsymbol{a_n = 3 + n^2}$	$\lim_{n\to\infty}(3 + n^2) = +\infty$	**14 acertos**
$\boldsymbol{a_n = 1 - 2n}$	$\lim_{n\to\infty}(1 - 2n) = -\infty$	**14 acertos**

A última atividade dessa etapa tinha como objetivo analisar a soma dos termos da sequência de termo geral $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$**,** que foi trabalhada na atividade 9(A). A realização dessa atividade levava os alunos a concluírem, através dos cálculos indicados no material e da visualização e considerando S_n a soma das áreas das regiões de a_1 até a_n que se tem:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Os alunos puderam perceber que na medida em que *n* aumenta, a área das pequenas regiões se aproximam cada vez mais de zero e ao somar todas as áreas encontradas, ficavam, evidentemente, com a área do quadrado de lado 1(um) do início, com 1(uma) unidade de área.

Observa-se, a exemplo do aluno A_5, conforme apresentado na Figura 23, que todos os alunos conseguiram responder corretamente essa questão de modo a interpretar o que era desejado.

s_n = **Soma das regiões obtidas de** a_1 até a_n	**Valor obtido:**
$S_1 = a_1$	$S_1 = 0{,}5$
$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$	$S_2 = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$	$S_3 = 0{,}75 + 0{,}125 = 0{,}875$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$	$S_4 = 0{,}875 + 0{,}0625 = 0{,}9375$
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_4 + a_5$	$S_5 = 0{,}9375 + 0{,}03125 = 0{,}96875$
...	...
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$	$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

Figura 23 – Resolução de parte da atividade 9(C) por A_5.

Além disso, responderam corretamente ao questionamento: O que acontece com os valores de S_n na medida em que os valores de *n* aumentam cada vez mais? Abaixo são apresentadas algumas das respostas:

"*Se aproximam do valor total da área (1)".* (A_5)

"*O valor se aproxima de 1, que é o valor da área* – do quadrado maior- ". (A_4)

"*Se aproximam cada vez mais de 1*". (A_9).

"*O valor se aproxima do valor total da área* – do quadrado maior-". (A_{12})

Desde já podemos verificar que a ideia intuitiva de limite e de processos infinitos de aproximação foi entendida pelos estudantes. A maioria deles conseguiu acertar e mostrar bom entendimento sobre o significado do limite de uma função na medida em que x se aproxima de um valor e também para valores tendendo ao infinito. O comportamento de uma função quadrática, também foi corretamente relacionado aos seus limites no infinito, de modo a ampliar o conhecimento dos estudantes nesse tópico. Além disso, através da atividade de construção e do trabalho com áreas, os estudantes conseguiram ampliar a aplicação da ideia intuitiva de limite para sequências, conforme observado.

Outra atividade semelhante a esta pode ser feita a partir de um triângulo equilátero, também de área unitária (1 u. a.). O procedimento é semelhante ao que foi adotado anteriormente: a partir do triângulo considerado, traçar um triângulo inscrito nele e com vértices exatamente nos pontos médios de cada um dos lados do triângulo anterior. O triângulo inscrito dividirá a área do triângulo maior em 4 partes iguais e, portanto, sua área de será $\frac{1}{4}$ u.a.. Se dividirmos este novo triângulo, seguindo as mesmas orientações, o próximo triângulo traçado terá área igual a $\frac{1}{16}$ u.a., e assim sucessivamente, conforme mostra a figura 24.

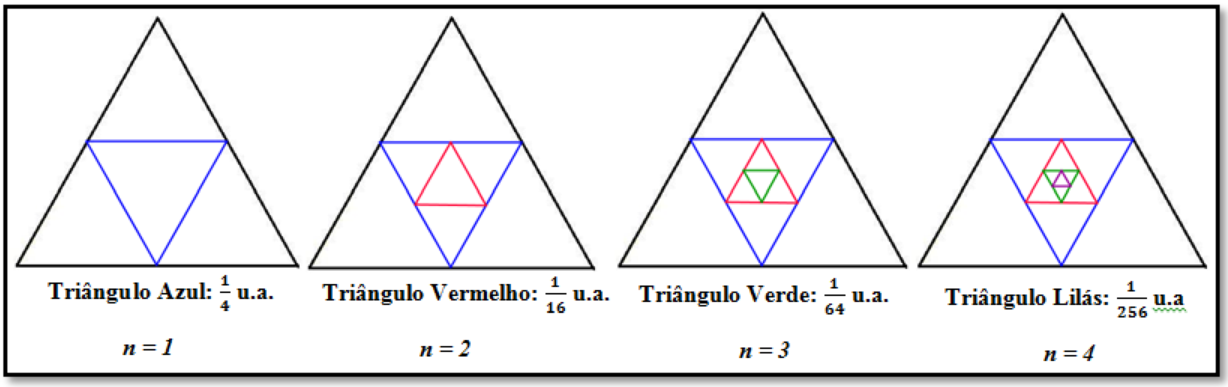


Figura 24 – Ilustração para explorar a construção da sequência de termo geral $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Se o processo continuar por várias vezes a sequência numérica das áreas obtidas será $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots$.., também uma progressão geométrica, neste caso de razão $\frac{1}{4}$. É possível concluir acerca do limite dessa sequência e também sobre a soma das áreas das regiões que foram sendo determinadas, de modo totalmente análogo ao que fizemos acima. É possível ainda explorar variações desses problemas considerando, por exemplo, outros valores para a área inicial das figuras consideradas.

No caso de considerarmos a área unitária para o triângulo equilátero preto na figura 24, a sequência numérica formada pelas áreas dos triângulos equiláteros obtidos a partir da sequência de termo geral $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ é exatamente o que está indicado na ilustração, ou seja:

$a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$ $\quad$ $a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ $\quad$ $a_5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$

$a_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ $\quad$ $a_4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$ $\quad$ $a_6 = \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{1}{4096}$

Assim, obtemos a sequência $a_n = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{4096}, \ldots, \frac{1}{4^n}, \ldots\right)$.

Apesar de não ter sido proposta esta atividade aos alunos dessa turma experimental, é bastante provável, a partir das conclusões anteriores, que o limite da sequência poderia ser compreendido por eles, já que segue o mesmo padrão que o anterior. Assim, os alunos identificariam que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$$

Já o limite da soma dos termos dessa sequência, exige um pouco mais de atenção e abstração dos estudantes, como podemos notar na tabela abaixo. Se o aluno for cuidadoso no cálculo, considerando S_n como a soma das regiões obtidas de a_1 até a_n, e perceber que na medida em que tomar triângulos cada vez menores, estes contribuem com parcelas também cada vez menores para o cálculo da área, conseguirá obter o limite desejado.

Deve-se notar que, nesse caso, essa conclusão não pode ser tirada diretamente a partir da observação das figuras construídas, como aconteceu no exemplo do quadrado, na atividade proposta aos estudantes.

Portanto, de acordo com a tabela 9, o aluno poderá concluir, intuitivamente que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Tabela 9 - Soma dos *n* primeiros termos da sequência $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

s_n = **Soma das regiões obtidas de** a_1 **até** a_n	**Valor obtido:**
$S_1 = a_1$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64} = 0{,}328125$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{85}{256} = 0{,}33203125$
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_4 + a_5$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} = \frac{341}{1024} \approx 0{,}33007812$
...	...
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$	$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{4^n}$

Dessa forma, é possível ainda, depois do estudo de funções, continuar trabalhando com o conceito intuitivo de limites aplicados aos demais conteúdos do primeiro ano do Ensino Médio. As progressões aritméticas e geométricas, aliadas ao cálculo de áreas, a outras noções de Geometria (ponto médio, por exemplo), são bons exemplos da possibilidade desse trabalho, de forma a explorar ainda mais o caráter integrador dos diversos conteúdos matemáticos explorados pelo estudante até essa etapa de sua escolaridade.

5.3 Roteiro de atividades – Parte 3

Nesta terceira etapa da realização das atividades com os estudantes, pretendia-se, de modo intuitivo, introduzir o significado da derivada de uma função, de acordo com o que é sugerido por Àvila (2006). As atividades que foram aplicadas (Anexo C) exploram a aproximação do cálculo da velocidade instantânea de um objeto dada a equação de seu movimento (ou informações sobre a posição do objeto em cada instante de tempo a ser analisado), e sugerem a compreensão do significado das expressões “taxa de variação média” e “taxa de variação instantânea”.

Além disso, na sequência, esse roteiro buscou abordar o conceito de derivada a partir da construção da reta tangente a um ponto $P = \left(x, f(x)\right)$ do gráfico de uma função a partir de uma reta secante que passa pelo ponto P e por um ponto $Q = (x + h, f(x + h))$. O conceito de derivada, neste caso, foi explorado através de um processo de aproximação o qual consistia em fazer essa reta secante tender à posição tangente analisando o seu coeficiente angular, ou seja, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, em cada passo, na medida em que h se aproximava cada vez mais de zero. No Geogebra a interpretação feita pelos estudantes foi semelhante, eles analisaram essa razão na medida em que o ponto Q se aproximava cada vez mais do ponto P .

Assim, o que interessava naquele momento, era exatamente o que Ávila descreveu, ao analisar a figura 25 sem, no entanto, a necessidade de utilizar a denominação “derivada”.

> A reta secante vai passando por várias posições, aproximando-se de uma posição limite, uma reta limite, por assim dizer, a qual é definida como sendo a reta tangente à curva no ponto P. [...] Repare que *h* nunca é zero, pois esse valor não faria sentido na razão incremental $\Delta y/h$. O que nos interessa é saber o *valor limite* dessa razão, o valor do qual ela pode se tornar tão próxima quanto quisermos, bastando para isso fazer *h* suficientemente pequeno. Esse limite é o que se chama a *derivada* da função no valor *x* da variável independente. (ÁVILA, 2006, p.34, grifo do autor).

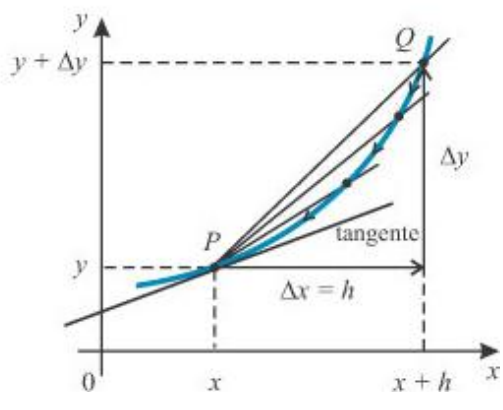


Figura 25 – Reta secante tendendo à reta tangente no ponto P. Fonte: (ÁVILA, 2006, P.34).

A partir de agora será apresentada a análise do material produzido pelos estudantes, para verificar se os objetivos estabelecidos foram alcançados. Destaca-se, desde já, que entre os encontros realizados, este da aplicação das atividades presentes no Anexo C, foi o que os estudantes demonstraram maior nível de dificuldade, devido a quantidade de conceitos inter-relacionados, e também maior nível de interesse em função da aplicabilidade dos assuntos abordados.

5.3.1 Trabalhando com velocidade média e velocidade instantânea

Através de uma situação-problema envolvendo o deslocamento de um automóvel em função do tempo gasto para percorrer essa distância, o conceito de velocidade média foi abordado. Nessa etapa, a ideia era bastante simples: para calcular a velocidade média ($V_{Méd}$), bastava considerar a razão (taxa) entre a distância percorrida por um objeto (Δd) e o tempo gasto nesse deslocamento (Δt), ou seja, $V_{Méd} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$, conforme já tinham estudado na disciplina de Física.

Com base nisso, o objetivo da atividade 10 (Anexo C), era relacionar a velocidade média com o cálculo do coeficiente angular de uma reta, trabalhado ainda na primeira tarde de atividades. Somente para lembrar, naquela oportunidade os estudantes compreenderam o significado de coeficiente angular como sendo: *a razão entre a variação dos valores da variável dependente y* em relação *à variação sofrida pela variável independente x* da função *f(x) num certo intervalo.*

Analisando as respostas dos estudantes, verifica-se que todos efetuaram corretamente o cálculo da velocidade média pedida em cada um dos exemplos apresentados. Por exemplo, no item (e) da atividade 10(A): *"Qual é o coeficiente angular da reta que representa o movimento desse objeto? Você consegue perceber algumas relação entre o coeficiente angular e a velocidade média, calculada nesse caso?"*, merece destaque o fato de que, a maioria dos alunos estabeleceu as relações esperadas entre o coeficiente angular da reta que é gráfico da função $f(x) = 3x - 2$, e a velocidade média, para essa equação do movimento de um objeto, no intervalo de 1 a 3 segundos.

"*A velocidade média e o coeficiente angular são calculados de forma igual*". (A_2)

"*O coeficiente angular é 3, o coeficiente angular é calculado desta forma* $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *e a velocidade média é* $V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$*, eles são calculados iguais*". (A_8)

"*O coeficiente é 3 [...] é feita a variação do y dividida pela variação do x nos dois casos, na velocidade média e no coeficiente angular*".(A_4 e A_5)

"*O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos solicitados é igual a velocidade média*"(A_{10})

O desafio proposto aos estudantes, na sequência das atividades, referia-se a compreensão do conceito e do cálculo da aproximação da velocidade instantânea de um objeto, ou seja, determinar sua velocidade em um determinado instante. Para isso, foi utilizado um exemplo apresentado no material da disciplina Fundamentos de Cálculo do Profmat, conforme segue.

Exemplo: *Imagine a situação em que um jogador de vôlei foi sacar, levantou a bola, mas se arrependeu e a bola caiu muito próxima do ponto onde foi lançada. Imagine que esse movimento todo tenha levado um pouco mais de 2 segundos e que a partir de fotografias tiradas em intervalos regulares foi possível dizer a altura da bola a cada segundo, apresentados na tabela a seguir. Qual é a velocidade da bola no instante x = 1?*

Tempo em segundos $\boldsymbol{x}$	**0**	**0.5**	**1**	**1.1**	**1.2**	**1.5**	**2**
Altura em metros $\boldsymbol{f(x)}$	**2**	**6.25**	**8**	**8.05**	**8**	**7.25**	**4**

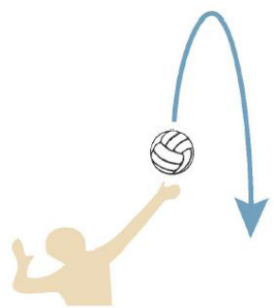


Figura 26 - Ilustração e tabela de valores. Fonte: Material PROFMAT – Fundamentos de Cálculo

Com base na figura 26, para responder a essa pergunta os alunos primeiramente preencheram uma tabela, calculando a velocidade média $\left(V_{Méd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, em vários intervalos, cada vez menores, a fim de aproximar a velocidade média da velocidade instantânea da bola no tempo $x = 1$. Os estudantes perceberam que os intervalos considerados tinham amplitude cada vez menor, sendo que no último intervalo, entre 1 e 1,1 segundos já obtiveram uma boa aproximação para a velocidade procurada, obtendo 0,5 m/s.

Com essa atividade os alunos perceberam que quanto menor o intervalo de tempo que for sendo considerado mais próximo o cálculo da velocidade média estará da velocidade no instante procurado. Com esse exemplo, foi possível introduzir, além do conceito de velocidade instantânea e a aproximação do seu cálculo, também a notação adequada, que nos fornece exatamente a ideia intuitiva do procedimento de aproximação que foi realizado.

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} V_{méd} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Essa notação, ao ser trabalhada com os estudantes, possibilitou o entendimento de que quanto menor o intervalo de tempo considerado, ou seja, quanto mais próximo de zero tomarmos Δx, mais próxima a velocidade média fica da velocidade instantânea.

Assim, dos 14 alunos participantes, 11 identificaram 0,5 m/s como a aproximação desejada para a velocidade instantânea da bola no instante $x = 1$, os demais apresentaram algum tipo de erro de cálculo ao preencher a tabela e obtiveram outros resultados. Acompanhe, por exemplo, na figura 27, os cálculos do aluno A_4 para a aproximação dessa velocidade.

Intervalo de tempo $[x_1, x_2]$	**Intervalo de altura $[y_1, y_2]$**	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta y = y_2 - y_1$	$V_{méd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
[1 , 2]	[8,4]	$\Delta x = 2-1 = 1$	$\Delta y = 4-8 = -4$	Vmed $= \frac{-4}{1} = -4$ m/s
[1, 1.5]	[8;7,25]	$\Delta x = 1,5-1 = 0,5$	$\Delta y = 7,25-8 = -0,75$	Vmed $= \frac{-0,75}{0,5} = 1,5$ m/s
[1, 1.2]	[8,8]	$\Delta x = 1,2-1 = 0,2$	$\Delta y = 8-8 = 0$	Vmed $= \frac{0}{0,2} = 0$ m/s
[1, 1.1]	[8,8,05)	$\Delta x = 1,1-1 = 0,1$	$\Delta y = 8,05-8 = 0,05$	Vmed $= \frac{0,05}{0,1} = 0,5$ m/s

Figura 27 – Tabela (Atividade 11) preenchida por A_4: Aproximação da Velocidade instantânea da bola em *x=1*

Os registros dos estudantes evidenciam que esta atividade foi entendida e os objetivos propostos foram alcançados. Além disso, em aula, os alunos fizeram vários questionamentos procurando saber mais sobre a velocidade instantânea. Um questionamento de destaque foi realizado pelo aluno A_3: "*Quando passamos de carro por uma lombada eletrônica, a velocidade indicada é a velocidade instantânea*?".

O questionamento foi aberto para toda a turma e a conclusão da troca de ideias com os estudantes é de que, os "sensores" colocados no chão antes dos visores das lombadas, captam a informação do intervalo de tempo que o carro leva para "passar" sobre esses sensores. Como a distância entre os sensores é fixa, o equipamento faz o cálculo da velocidade média, e fornece a velocidade que aparece no visor eletrônico da lombada. Porém, tanto o intervalo da distância percorrida, como o intervalo do tempo que o carro leva para passar sobre os sensores são muito pequenos, então a velocidade indicada é uma aproximação bastante fiel da velocidade instantânea do automóvel.

Na aula seguinte, esse assunto foi retomado e, de fato, confirmado, como destacado em artigo publicado na página da Associação Brasileira de Educação no Trânsito (ABETRAN), o qual faz referência ao Código de Trânsito Brasileiro, no que se refere às infrações por excesso de velocidade.

> Nosso Código de Trânsito prevê no Art. 218 que a infração do excesso de velocidade se dá pela "velocidade instantânea" e não pela "velocidade média", apesar de que a medição por qualquer tipo de aparelho hoje homologado se dá pela medição entre dois pontos muito próximos, entre os quais não haveria modificação substancial, dando um resultado praticamente instantâneo. [...] Os "radares" e "lombadas eletrônicas" funcionam através de cintas magnéticas instaladas no chão, num espaçamento pré-conhecido, e que é acionado o primeiro sensor quando o veículo o toca, e desligado quando toca o segundo. O aparelho calcula o tempo entre esses dois pontos e obtém a velocidade com baixo grau de erro. (ARAÚJO, 2010).

O questionamento e a atenção dos estudantes a esse fato são indicativos de que os assuntos matemáticos desenvolvidos naquele encontro estavam interessantes. Mais uma vez destaca-se a aplicação do conteúdo matemático em situações práticas, nas quais o aluno pode perceber a real utilidade da matemática. Outro questionamento que surgiu nesse encontro se referiu à velocidade máxima permitida em um trecho de uma estrada. Será que existe alguma relação desse fato com a ideia intuitiva de derivada?

Esse questionamento foi abordado juntamente com as atividades que analisaremos a seguir. Nestas atividades foram trabalhadas a noção de reta tangente ao gráfico de uma função e a análise do coeficiente angular dessa reta. Pode-se, no entanto, relacionar essa pergunta com uma expressão popular usada quando ocorrem acidentes, por excesso de velocidade, em curvas acentuadas: “o veículo saiu pela tangente”. É possível justificar matematicamente esse fato?

Esse assunto será retomado a fim de procurar responder a esses questionamentos no decorrer da análise e conclusões das próximas atividades.

5.3.2 O conceito de reta tangente ao gráfico de uma função e seu coeficiente angular: a ideia intuitiva de derivada de uma função em um ponto

As atividades 12, 13 e 14, que compõem o terceiro roteiro de atividades (Anexo C), visavam abordar a construção e o entendimento do significado de reta tangente ao gráfico de uma função. Além disso, as mesmas pretendiam, através da análise do coeficiente angular dessa reta em pontos do domínio da função, concluir acerca do comportamento do seu gráfico, relacionando esse conceito aos conhecimentos prévios dos estudantes sobre intervalos de crescimento, decrescimento e concavidade de uma função quadrática.

Para iniciar o estudo desses tópicos, na atividade 12, os estudantes foram orientados a construir, no Geogebra o gráfico da função $f(x) = x^2$. Em seguida, inseriram o ponto *P=(1,f(1))* sobre o gráfico da função. Com auxílio do recurso “*Seletor*” desse software, inseriram um parâmetro “*a*” variando de 1.1 (*mínimo*) a 3 (*máximo*), acrescentaram o ponto *Q = (a,f(a))* e a reta que passava por P e Q. Essa construção possibilitava aos estudantes movimentar o parâmetro inserido e analisar a posição da *reta PQ* construída. Na verdade, essa reta, secante por P e Q ao gráfico de $f(x) = x^2$ se aproximava cada vez mais da reta tangente em *x=1*, na medida em que o parâmetro “*a”* se aproximava cada vez mais de 1.

A figura 28 apresenta algumas das retas secantes obtidas nessa atividade. A construção feita por A_2, com o recurso “*Habilitar rastro*” deixa em evidência a sequência de retas formadas de acordo com a movimentação do parâmetro “*a*” inserido. As questões propostas na sequência exigiam dos estudantes o cálculo do coeficiente angular das retas secantes obtidas e a anotação de suas conclusões em uma tabela.

A reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ foi definida como sendo a reta limite dessa aproximação, ou seja, a reta de equação $y = ax + b$, que só possui em comum com o gráfico da função o ponto P, neste caso *P=(1,f(1))*. O desafio proposto aos estudantes, após essa definição era a obtenção da equação da reta tangente ao gráfico dessa função. Para isso, era necessário encontrar (ou melhor, aproximar) o coeficiente angular da reta tangente no ponto desejado. Mas essa tarefa, a essa altura, pareceu simples aos estudantes, uma vez que já tinham obtido aproximações para esse coeficiente angular.

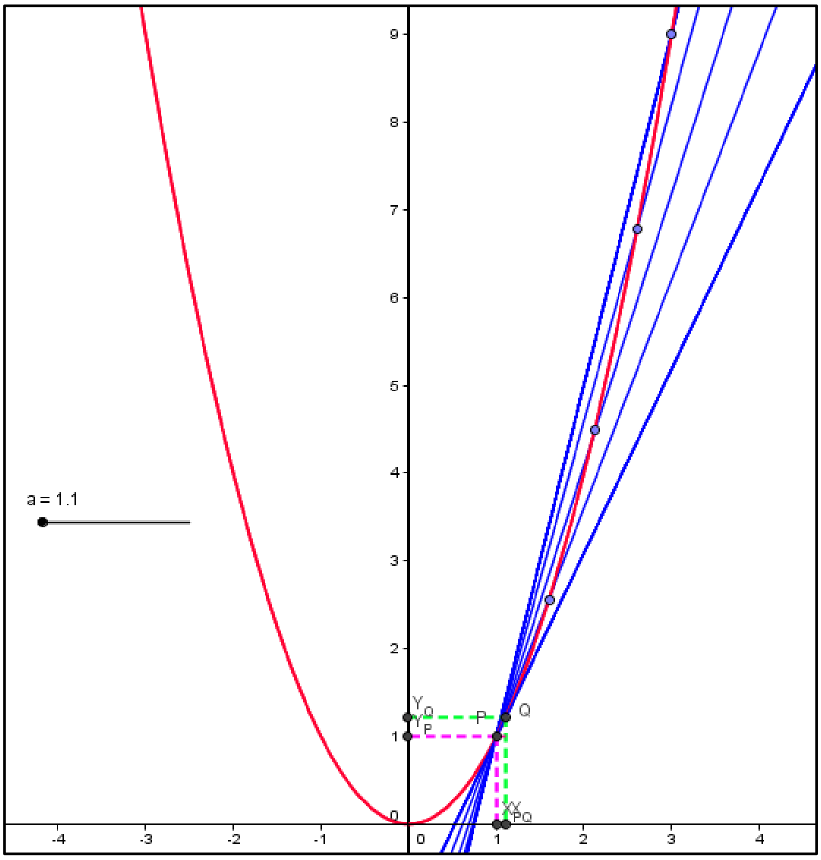


Figura 28 – Reta secante a $f(x) = x^2$ tendendo a posição tangente em $x=1$.

Entre os 14 estudantes que fizeram essa atividade, todos concluíram, através da observação e dos cálculos dos coeficientes angulares que haviam realizado, que na medida em que o valor do parâmetro “a” se aproximava cada vez mais de 1, o ponto Q se aproximava cada vez mais do ponto P, e a reta PQ se aproximava da posição da reta tangente em $x=1$.

Acompanhe, na tabela 10, um resumo dos cálculos que os estudantes realizaram na atividade 12(A). Na conclusão da atividade, os alunos tiveram certa dificuldade para montar a equação da reta tangente, uma vez que não perceberam, de imediato, que poderiam descobrir o valor de n da equação $y = mx + n$, por substituição, já que possuíam o ponto $P=(1,f(1))$, ou seja, $P=(1,1)$ que pertencia a reta e conheciam o coeficiente angular m pelas aproximações obtidas na tabela 10 ($m=2$).

Na conclusão da atividade, a equação da reta obtida foi $y = 2x - 1$. Nessa atividade, 12 alunos apresentaram corretamente essa equação, sendo que os que erraram apresentaram erros na manipulação algébrica da equação, ao substituir os respectivos valores de x, y e m, para o cálculo de n, e também não relacionaram este parâmetro com a lei de uma função do 1º grau do tipo $f(x) = ax + b$, na qual o coeficiente "b" indica a ordenada do ponto de intersecção da reta (tangente ao gráfico, nesse caso) com o eixo OY.

Tabela 10 – Aproximação do coeficiente angular da reta tangente a $f(x) = x^2$ em *x=1*

PONTO P	***"a"***	**PONTO Q**	**Coeficiente angular da reta:** $\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$
(1 , 1)	**3**	(3,9)	$m = \frac{8}{2} = 4$
(1 , 1)	**2.5**	(2.5,6.25)	$m = \frac{5{,}25}{1{,}5} = 3{,}5$
(1 , 1)	**2**	(2,4)	$m = \frac{3}{1} = 3$
(1 , 1)	**1.5**	(1.5, 2.25)	$m = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$
(1 , 1)	**1.1**	(1.1, 1.21)	$m = \frac{0{,}21}{0{,}1} = 2{,}1$

Dando continuidade ao trabalho, os alunos utilizaram um recurso do Geogebra denominado "*Tangentes*" e traçaram a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = -x^2 + 3$ no ponto $P = (1, f(1))$, ou seja, em $P = (1,2)$. Depois, sem aviso prévio de que a equação da reta já estava visível na janela algébrica do software, os estudantes determinaram dois pontos dessa reta, calcularam seu coeficiente angular e montaram a equação da reta tangente: $y = -2x + 4$.

Nessa atividade os estudantes conseguiram com mais facilidade manipular as informações necessárias. Apesar disso, um estudante não conseguiu obter corretamente a equação pedida, e outro, que mesmo depois de ter calculado corretamente o valor do coeficiente angular $m = -2$, esqueceu de apresentar o sinal negativo ao montar a equação da reta.

O estudo do comportamento de uma função quadrática, bem como a identificação dos intervalos de crescimento ou decrescimento da função, a noção de pontos de máximo ou de mínimo de uma função foram explorados, na atividade 13, a partir da análise da inclinação da reta tangente a curva de seu gráfico. Inicialmente os estudantes construíram no software o gráfico de $f(x) = x^2$ inseriram um parâmetro *"a"* e marcaram, sobre o gráfico o ponto *P=(a,f(a))*. A seguir, construíram a reta tangente a $f(x)$ em P, depois foram orientados a utilizar o recurso "*inclinação*", o qual fornece diretamente na janela algébrica o valor do coeficiente angular da reta.

Com essa ferramenta do Geogebra os estudantes conseguiam visualizar as respectivas variações Δx e Δy em um intervalo considerado pelo software, bem como o valor do coeficiente angular (m) da reta tangente que foi traçada. Os estudantes perceberam que, na verdade, essa nova ferramenta, fornecia a eles as informações que eles haviam precisado calcular na atividade anterior. É possível perceber isso na figura 29, de acordo com a construção realizada pelo aluno A_5.

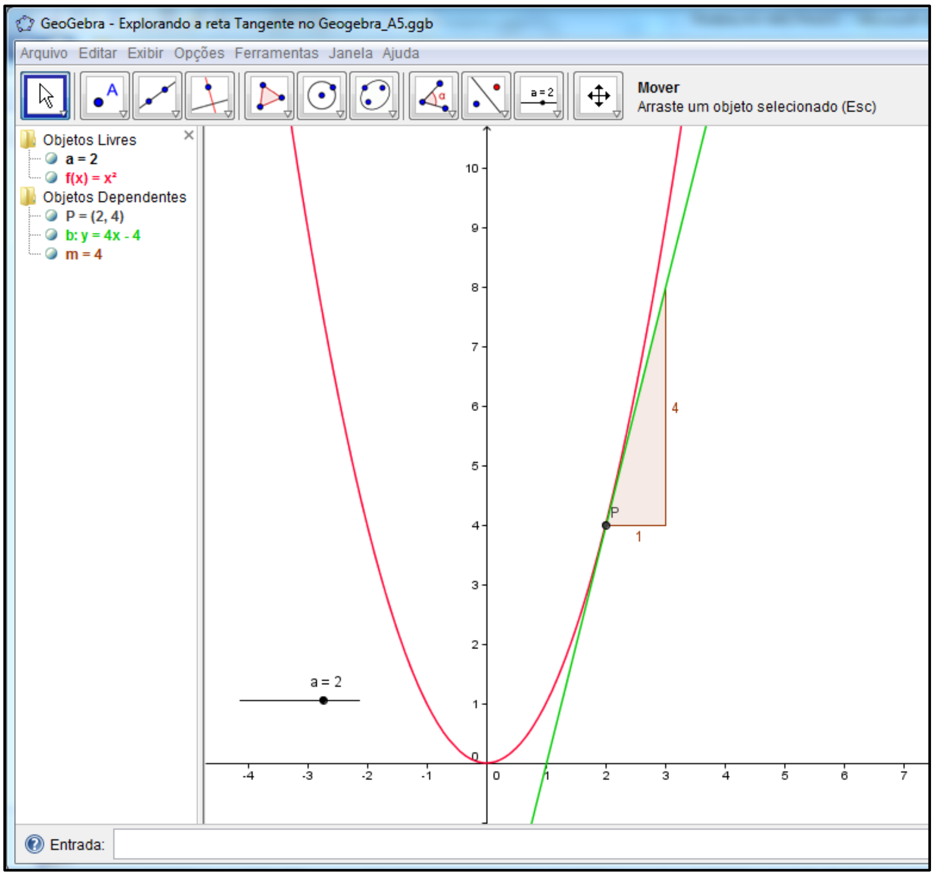


Figura 29 – Construção referente a atividade 13 feita por A_5

Após a observação da construção realizada, os alunos preencheram uma tabela com informações sobre a reta tangente ao gráfico da função de acordo com modificações no parâmetro "*a"* que havia sido inserido. A partir da visualização, os estudantes não demonstraram dificuldades em identificar os intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática em questão e relacioná-los com os intervalos onde o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico era respectivamente, positivo ou negativo.

Além disso, os estudantes foram indagados a identificar alguma relação existente entre o parâmetro "a", que representava a abscissa x de cada ponto P e o valor respectivo do coeficiente angular *m* em cada ponto. O objetivo desse questionamento é a percepção intuitiva de que, para a função $f(x) = x^2$, temos $f'(x) = 2x$, sendo $f'(x)$ a derivada da função $f(x)$. A partir da observação na tabela (como exemplo observar Figura 30) preenchida antes desse questionamento, entre os 14 alunos 13 fizeram relações corretas e apresentaram respostas coerentes ao questionamento, como por exemplo, as destacadas abaixo:

"*A abscissa 'a' é multiplicada por 2*". (A_{10})

"*O coeficiente angular da reta é sempre o dobro do parâmetro 'a', e também é o dobro dos valores da abscissa x*". (A_5)

"*O coeficiente angular da reta é sempre o dobro do valor de x em cada ponto*".(A_{11}, A_6, A_8 e A_{12})

"*O valor de 'm' é o dobro do valor da abscissa 'x' de cada ponto*". (A_2)

a	Coordenadas do ponto P = (x,y)	Inclinação da reta tangente : m	A reta tangente é crescente ou decrescente?	Equação da reta tangente ao gráfico no ponto P
-3	(-3,9)	-6	Decrescente	y=-6x-9
-2	(-2,4)	-4	Decrescente	y=-4x-4
-1	(-1,1)	-2	Decrescente	y=-2x-1
0	(0,0)	0	Constante	y=0
1	(1,1)	2	Crescente	y=2x-1
2	(2,4)	4	Crescente	y=4x-4
3	(3,9)	6	Crescente	y=6x-9

Figura 30 – Tabela da atividade 13(B) respondida por A_4.

Uma observação para aplicação dessa atividade, é sugerir aos estudantes no momento da inserção do parâmetro indicado acima, que se utilize outro caractere, por exemplo, “d” diferente do “a” que foi utilizado, para evitar erros de interpretação, que podem surgir já que, ao longo desse trabalho, utilizou-se “a” para fazer referência ao coeficiente angular de uma reta.

Na sequência, foi sugerida aos estudantes uma análise semelhante para a função $f(x) = -x^2$ e para outras funções: $f(x) = x^2 - 4x + 2$ e $f(x) = -x^2 + 6x - 4$. Foram observadas as características de cada função de modo a tirar conclusões importantes acerca do comportamento e o traçado do gráfico de uma função quadrática, como identificar as coordenadas do ponto de máximo ou de mínimo de cada função, seu intervalo de crescimento e decrescimento em relação ao intervalo que fornecia, respectivamente, coeficiente angular da reta tangente, positivo ou negativo, nos pontos pertencentes a cada intervalo considerado.

Dessa forma, os estudantes puderam perceber que:

- Quando o coeficiente angular da reta tangente *(m)* for *positivo* em um intervalo de variação do domínio da função, a função será *CRESCENTE nesse intervalo*.
- Quando o coeficiente angular da reta tangente *(m)* for *negativo* em um intervalo de variação do domínio da função, a função será DECRESCENTE *nesse intervalo.*
- Quando o coeficiente angular da reta tangente *(m)* for nulo em um ponto *P* (no caso da função quadrática), esse ponto é o ponto de máximo ou ponto de mínimo da função dada.
- *P =(x,y)* será <u>ponto de máximo</u> da função $f(x)$, se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico passar de positivo para negativo, ou seja, se a função $f(x)$ é crescente para valores do domínio menores que x e decrescente para valores maiores de x.
- Caso contrário, P = (x, y) será <u>ponto de mínimo</u>, ou seja, a função é decrescente até o ponto P e cresce a partir dele.

Merece destaque o fato de que todas as observações acima podem ser obtidas a partir da derivada primeira (e/ou segunda) de uma função, que geralmente estão relacionados com os estudos relativos às disciplinas iniciais de Cálculo do Ensino Superior. No entanto, pode-se verificar que é possível introduzir, o conceito de derivada, de forma intuitiva e baseada na visualização e experimentação para alunos ainda no primeiro ano do Ensino Médio. Além disso, sem aprofundar em detalhes, os alunos podem ser induzidos a tirar as mesmas conclusões permitidas pelo uso das derivadas no ensino superior e obter informações relevantes sobre o comportamento de uma função.

Segundo Ávila (2006, p.32) é possível ainda, justificar aos estudantes sobre a concavidade (para cima ou para baixo) de uma função quadrática a partir da inclinação da reta tangente, pois "dizer que a concavidade da curva está voltada para cima significa precisamente que o declive da reta tangente cresce à medida que crescem os valores atribuídos a *x*".

Esses conceitos foram utilizados na sequência para resolver os exercícios de aplicação apresentados na atividade 14. Os dois primeiros exercícios exigiam construções no software Geogebra, e após a interpretação das informações obtidas, repetindo os procedimentos adotados nas atividades 12 e 13, porém envolvendo uma equação do movimento de um objeto em cada situação-problema, representada por uma função quadrática.

Selecionamos o primeiro exercício para analisar, uma vez que as conclusões são análogas para o exercício 2.

Exercício 1. *Um objeto é lançado e, a partir do solo, a sua altura* $f(x)$ *(em metros), em função do tempo x (em segundos), é dada pela fórmula* $f(x) = -x^2 + 6x$.

Acompanhe as respostas aos questionamentos e o número de alunos que responderam corretamente a cada item.

a) Quais as coordenadas do ponto *P*, cuja reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, fornece coeficiente angular igual a zero?

Resposta: $P = (3{,}9)$. Foram 12 acertos.

b) Quanto tempo depois do lançamento o objeto atinge a altura máxima?

Resposta: Depois de 3 segundos. Acertaram esse item 12 alunos.

c) Qual é a altura máxima que o objeto atinge?

Resposta: A altura máxima é de 9 metros. Foram também 12 acertos.

d) Qual a velocidade média do objeto no intervalo [1,2]?

Resposta: Para $P_1 = (1{,}5)$ e $P_2 = (2{,}8)$ tem-se $V_{méd} = \frac{8-5}{2-1} = 3m/s$. Acertos: 12.

e) Qual a velocidade do objeto no instante $x = 1$? Justifique sua resposta.

Resposta: A velocidade instantânea é 4 m/s. Esperava-se que os alunos concluíssem acerca disso, diretamente observando o coeficiente angular da reta tangente em $x = 1$, como é possível observar na figura 31.

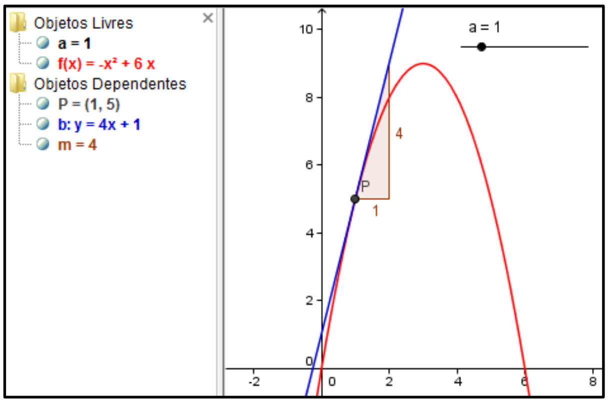


Figura 31 – Construção do Exercício 1 – Atividade 14 pelo aluno A_2.

Nessa atividade, 10 alunos responderam e justificaram corretamente, como pode ser notado nas falas abaixo:

"*A velocidade é 4, pois conforme aproximamos de x=1 o coeficiente angular se aproxima de 4*". (A_2)

"*A velocidade é 4. A medida que aproximamos cada vez mais o ponto x do 1, o coeficiente angular se aproxima cada vez mais do 4*".(A_4 e A_5)

"*É 4 pois é o coeficiente angular da reta* $y = 4x + 1$ *(tangente em x=1)*". (A_8)

O último exercício desse roteiro buscava analisar se, depois de terem trabalhado com vários exemplos, eles seriam capazes de explicar com suas próprias palavras a diferença entre taxa de variação média (por exemplo: velocidade média) e taxa de variação instantânea (por exemplo: velocidade instantânea). Dos 14 alunos, 12 responderam a essa questão e das respostas apresentadas, 11 forneceram de forma coerente relações entre as taxas, como por exemplo:

"*Velocidade média: precisa-se de 2 pontos. Velocidade instantânea pode ser calculada pelo ângulo da inclinação da reta tangente no ponto*". (A_{13})

"*A taxa de variação média, ou seja, velocidade média, podemos calcular pela fórmula* $V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. *A taxa de variação instantânea podemos saber pela inclinação da reta tangente, quanto mais se aproxima do ponto*". (A_4)

"*Taxa de variação média é obtida através da fórmula* $V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, *e a taxa de variação instantânea é obtida pelo m da função da reta tangente de y=mx+n*". (A_1)

As demais respostas eram bastante semelhantes às apresentadas, fazendo referência ao modo de se calcular cada uma das taxas. De modo geral os objetivos propostos para esse roteiro foram alcançados no todo pela maioria dos estudantes (10 entre os 14). Algumas dificuldades surgiram ao longo do processo, sendo que os quatro alunos alcançaram parcialmente os objetivos, apresentando alguns erros numéricos, por falta de atenção.

A partir dessas atividades, pode-se retomar a discussão iniciada no final da seção anterior. A expressão popular usada quando ocorrem acidentes, por excesso de velocidade, em curvas acentuadas: “o veículo saiu pela tangente”, indica justamente o fato de o veículo, não conseguir efetuar a curva em função de sua velocidade e seguir em linha reta (na direção da reta tangente àquela curva).

Resumidamente, as leis da Física, mais especificamente a Lei da Inércia (Primeira Lei de Newton) faz com que o veículo, em alta velocidade saia pela tangente à curva. Tipler (2000, p.76) cita essa lei: “Um corpo em repouso permanece em repouso a menos que sobre ele atue uma força externa. Um corpo em movimento desloca-se com velocidade constante a menos que sobre ele atue uma força externa”.

5.4 Roteiro de atividades – Parte 4

Nesta etapa do trabalho, as atividades propostas tinham como objetivo principal determinar a área limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, cujo conjunto imagem é não negativo, pelo eixo das abscissas e num intervalo [a, b] do seu domínio, ou seja, a região limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme pode ser observado na figura 32.

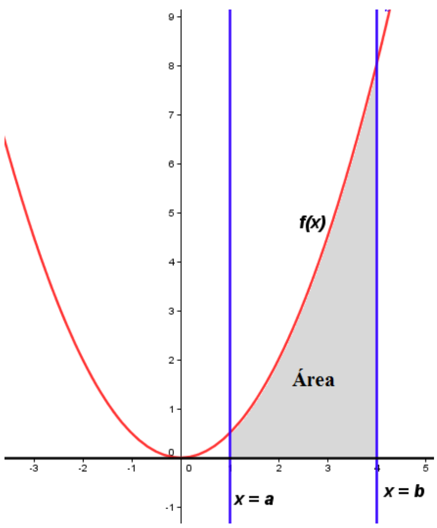


Figura 32 - Área limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$ e pelo eixo das abscissas num intervalo [a,b] do seu domínio.

A intenção das atividades é apresentar, de forma intuitiva, através de aproximações sucessivas utilizando retângulos por baixo e por cima da curva da função no intervalo considerado, uma forma de calcular a área dessa região. Note que essa ideia é exatamente o conceito de integral definida de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a,b]$ do seu domínio que, no ensino superior, representamos por $\int_a^b f(x)dx$.

Para as atividades propostas, o software Geogebra teve uma importância bastante significativa, já que foram explorados os recursos “Soma Superior” e “Soma Inferior”. Esses recursos possibilitam a visualização dos retângulos utilizados para a aproximação da área, de modo que, ao aumentar a quantidade de retângulos, mais próxima a soma das suas áreas fica da área da região que se deseja calcular. Assim, além de possibilitar a visualização, a utilização do Geogebra foi imprescindível para a compreensão da ideia intuitiva de integral definida.

A partir da análise que será apresentada na sequência, é possível verificar que os estudantes, a partir de seus conhecimentos prévios sobre o cálculo de áreas, sobre funções e utilizando o software matemático e a ideia de aproximações sucessivas, conseguiram calcular corretamente as áreas descritas nas atividades 15 a 24. Faremos uma seleção das atividades que serão analisadas, uma vez que os objetivos e procedimentos adotados em cada uma são semelhantes.

Destaca-se que dois estudantes (A_9 e A_{10}) não participaram da quarta e da quinta tarde de atividades, tendo justificado suas faltas e, portanto, não responderam às atividades propostas no Roteiro 4 (Anexo D).

5.4.1 Revisando áreas de figuras planas regulares

Desde o ensino fundamental o aluno aprende a calcular a área de regiões planas como retângulos, quadrados, triângulos, trapézios, etc. Assim, nas atividades 15 e 16 os estudantes relembraram o cálculo da área dessas figuras, especialmente de retângulos e triângulos. Todos os 12 alunos que estavam presentes, não tiveram dificuldades em calcular a área das figuras propostas na atividade 15.

Já na Atividade 16, foi proposta uma ampliação da aplicação das fórmulas conhecidas para o cálculo de áreas de triângulos e retângulos, a fim de calcular a área da região limitada por uma função de 1º grau e o eixo OX em um intervalo [a,b] do domínio dessa função. Para isso, bastava que os estudantes observassem que como o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta, podiam identificar a região do gráfico limitada pela reta e pelo eixo OX, como um triângulo (Caso 1: Figura 33) ou como a união de um retângulo A_1 com um triângulo A_2 (Caso 2: Figura 33) e, neste caso, a área da região é a soma das áreas: $A = A_1 + A_2$. Nesse segundo caso, poderia ser trabalhado ainda com o cálculo da área de um trapézio de bases medindo $f(b)$ e $f(a)$ e altura $(b - a)$.

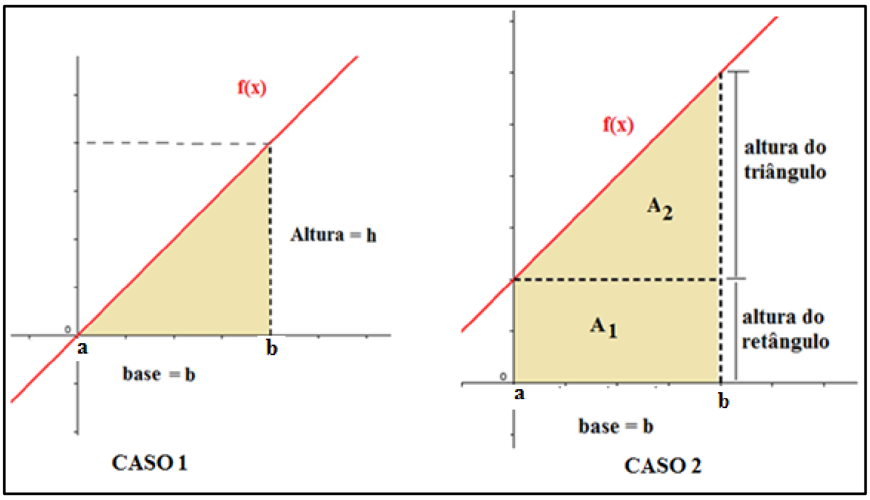


Figura 33 – Região limitada por uma função de 1º grau e o eixo OX em um intervalo [a,b].

A partir disso, todos os estudantes conseguiram, para as funções selecionadas em cada intervalo relacionado, identificar corretamente as regiões e calcular as respectivas áreas. No Geogebra, os alunos foram orientados a construir o gráfico de cada função e inserir as retas verticais $x = a$ e $x = b$, de acordo com o intervalo [a,b] considerado em cada caso. Depois disso, precisavam identificar a base e a altura correspondentes em cada caso para em seguida determinar a área da região especificada, sempre limitada pelo eixo OX.

Nessas atividades os estudantes utilizaram somente os conceitos sobre o cálculo de áreas que já conheciam, ou seja, a forma de calcular a área de uma figura regular plana continuou a ser aplicada para o cálculo da área de uma região limitada por uma função de 1º grau e o eixo OX em um intervalo [a,b] do domínio da função.

O próximo desafio proposto aos estudantes foi a resposta ao questionamento: *como calcular a área de uma região que não pode ser diretamente comparada a uma figura plana conhecida?* Para tentar responder a essa pergunta, a atividade 17 apresentou um exemplo aos estudantes para que refletissem e tentassem estimar a área da região descrita.

***Atividade 17 - Exemplo 1**: Estamos interessados agora em determinar a área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico de uma função contínua e positiva, por exemplo, $f(x) = x^2$, e uma reta vertical, por exemplo, x=2. Pense em uma maneira de fornecer um valor aproximado para a área pintada. Que valor você obteve?*

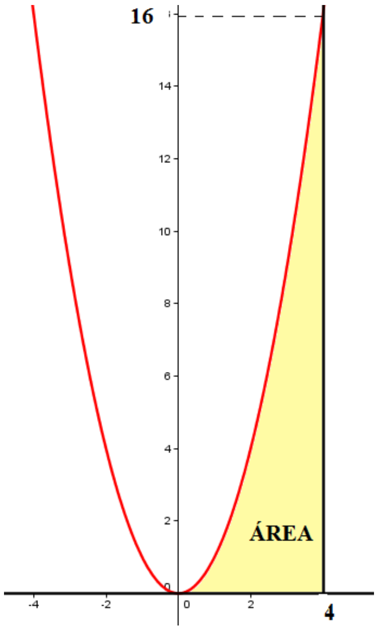


Figura 34 - Região limitada por $f(x) = x^2$ e o eixo OX no intervalo [0,4] para aproximação da área na Atividade 17.

Vários alunos apresentaram respostas bastante curiosas a essa atividade, utilizando a aproximação por triângulos e por retângulos, estimando alguns pontos sobre o gráfico para efetuarem seus cálculos. Na figura 35 apresentaremos um quadro que resume o que foi desenvolvido pelos alunos, que de forma intuitiva, mais se aproximaram do valor da área pintada na figura.

Note que a aproximação dessa área foi proposta posteriormente com o auxílio do software Geogebra na atividade 18, obtendo 21,3 unidades de área como aproximação da área descrita, já que foi exigida uma aproximação com precisão de uma casa decimal. Alguns alunos apresentaram estimativas consideravelmente próximas da área real, utilizando sua intuição para tanto.

ALUNO	Aproximação	Descrição do Procedimento adotado pelo aluno
A_5	**29 u. a.**	Calculou separadamente a área de um retângulo de base 4 e altura 2 e de um triângulo de altura 14 e base 3, considerando para tanto o intervalo [1,4] e somou as áreas obtidas.
A_7	**24 u. a.**	Tentou aproximar a área através de um triângulo de base 3 e altura 16, justificando que a área desconsiderada no intervalo [0,1] era compensada pela área em excesso no triângulo traçado.
A_2	**24 u.a.**	Chegou a conclusão de que a área varia entre 16u.a. e 32u.a. através do cálculo da área de dois triângulos. O triângulo 1 com base 4 e altura 16, com 32 u.a. considerando o intervalo [0,4] e o outro com base 2 e altura 16, considerando o intervalo [2,4], com 16 u.a.. Sua justificativa para a resposta igual a 24 u.a. considera que a área que sobra no primeiro triângulo é semelhante a área desconsiderada no segundo, por isso considerou a média entre 16 e 32.
A_{12}	**20.5 u.a.**	Considerou um triângulo de base 2.5 e altura 16, considerando o intervalo [1.5,4], obtendo 20 u.a. e somando 0.5u.a pela área que havia "ficado de fora" do triângulo.

Figura 35 – Quadro: aproximações obtidas para a área destacada por alguns alunos

5.4.2 Aproximação da área de figuras curvas: a ideia intuitiva de integral definida

Na Atividade 18 o objetivo era aproximar a área sob a curva da função $f(x) = x^2$, limitada pelo eixo OX no intervalo [0,4]. Primeiramente, no item (A) utilizando o comando "Soma Superior" do software Geogebra (versão 6.3), e a soma das áreas de 4 retângulos, de base 1 e com altura determinada pela ordenada do ponto de intersecção do retângulo criado com o gráfico da função. Neste caso, a área foi aproximada, por excesso. No item (B) dessa atividade, os alunos foram orientados a utilizar o comando "Soma Inferior" para aproximar por falta a área descrita, também utilizando 4 retângulos, de modo análogo ao item anterior.

Observe na figura 36, a construção feita por A_7 para a atividade 18(A) com os retângulos em vermelho (claro) e 18(B) com os retângulos em azul (escuro). Observe que os retângulos em azul estão sobrepostos aos retângulos em vermelho.

Os comandos utilizados nessa etapa do trabalho podem sofrer modificações, relativas a sintaxe na inserção de comandos, em função da versão do Software Geogebra utilizado. Neste trabalho, utilizou-se a versão 6.3 desse aplicativo.

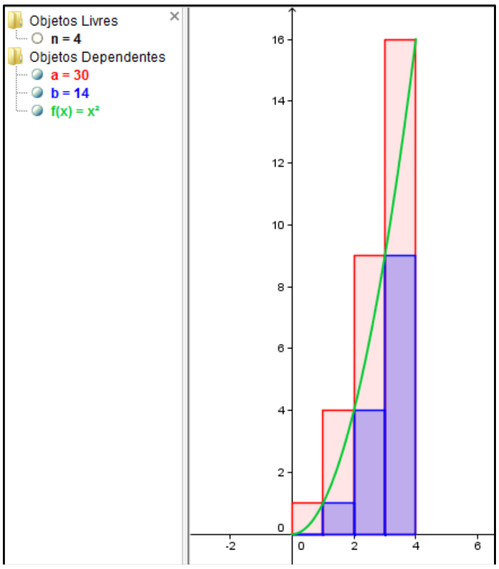


Figura 36 – Aproximação da área descrita na atividade 18 feita por A_7 no Geogebra

Pode-se observar também que o parâmetro "*a*" que aparece (em vermelho) na janela algébrica do Geogebra (Figura 36) indica a aproximação da área por excesso, ou seja, somando a área dos quatro retângulos vermelhos. Da mesma forma, o parâmetro "b" indica a aproximação da área por falta, ou seja, pela soma das áreas dos retângulos em azul. Assim, tem-se que a área procurada está limitada por esses parâmetros, ou seja, $a >$ Área procurada $> b$, ou ainda, podemos dizer que, a área da região abaixo da curva do gráfico que queremos calcular fica limitada pelos valores da Soma Superior e Soma Inferior:

Soma Inferior < ÁREA PROCURADA < Soma Superior

Com base nisso, os alunos foram orientados a aumentar o número de retângulos, utilizando o recurso "Seletor" do Geogebra, e encontrar valores cada vez mais próximos da área real abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2$, limitada pelo eixo OX, no intervalo [0,4]. Na medida em que faziam esse procedimento, anotavam em seus materiais os valores aproximados obtidos, de modo que para 1000 retângulos (um número consideravelmente grande) os valores obtidos para o parâmetro *Soma Superior* "*a*" foi 21,37 unidades de área e para o parâmetro *Soma Inferior* "*b*" a aproximação obtida foi 21,3 unidades de área.

Todos os alunos conseguiram utilizar os recursos do software Geogebra necessários a essa atividade e conseguiram perceber, que na medida em que o número de retângulos aumentava cada vez mais, as aproximações obtidas eram cada vez melhores. Podemos notar essa afirmação na sequência de aproximações apresentadas na figura 37.

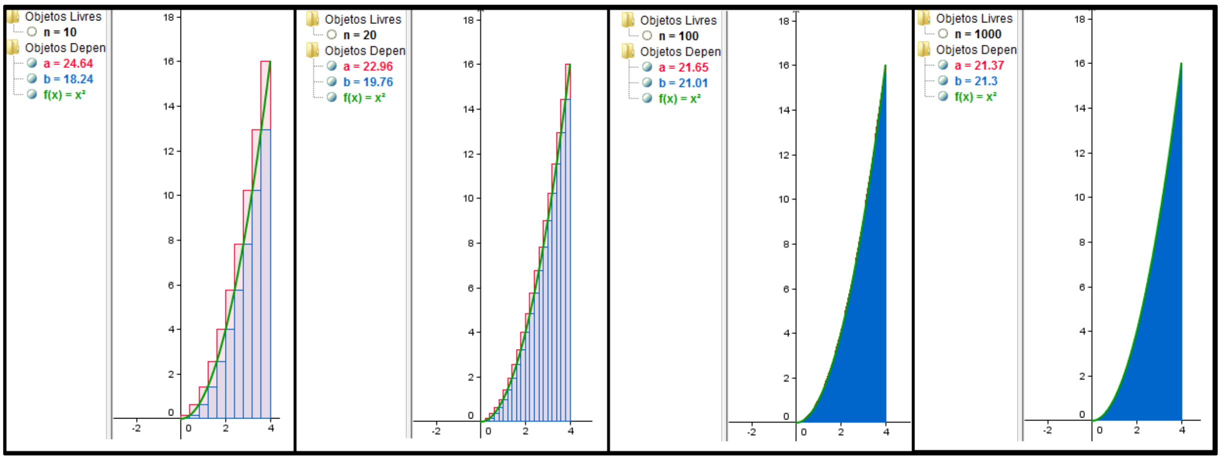


Figura 37 – Aumentando o número de retângulos – Atividade 18(C)

A Atividade 19 trabalhou com a função quadrática $f(x) = 4 - x^2$ no intervalo [0,2], utilizando os mesmos passos seguidos na atividade anterior, para aproximar a área sob o gráfico da função, limitada pelo eixo OX no intervalo considerado. Sem dificuldade, todos os alunos conseguiram encontrar uma boa aproximação para a área, obtendo 5,3 unidades de área. Já que na medida em que o número de retângulos aumentava cada vez mais, o valor da área da região se aproximava cada vez mais de 5,3, como é possível analisar na figura 38, pelas construções feitas por A_5.

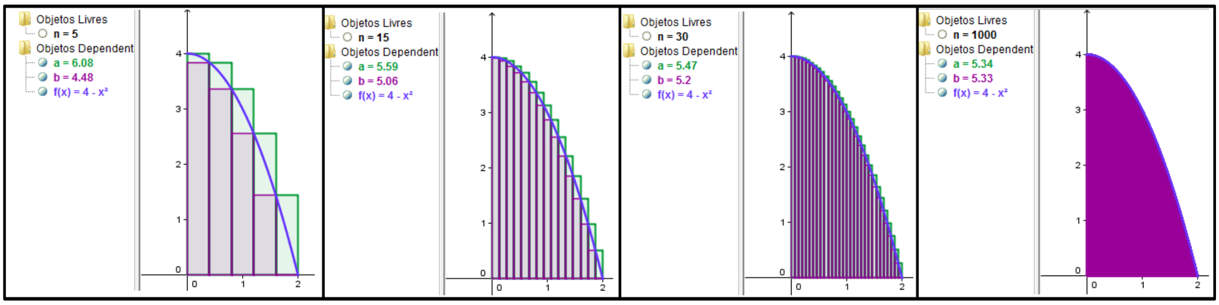
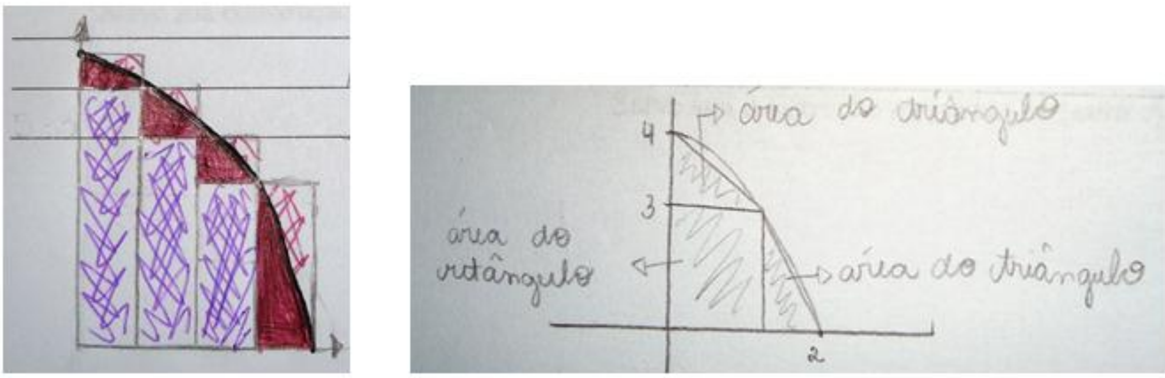


Figura 38 - Aproximações sucessivas para a área descrita na atividade 19, realizadas por A_5.

Na atividade seguinte outro desafio foi proposto aos estudantes. Até aquele momento, para calcular as áreas das regiões curvas consideradas, eles somente haviam utilizado a ideia de aproximar a área sob a curva do gráfico de uma função positiva, contínua, definida em um intervalo, usando retângulos de bases iguais, cujas respectivas alturas correspondem à imagem da função em determinados pontos do intervalo considerado.

A partir disso, na Atividade 20, os alunos foram indagados a apresentar, se fossem capazes, outras formas de aproximar essas áreas. Dos 12 alunos participantes da atividade dois não apresentaram sugestões, e entre os demais, merecem destaque as sugestões fornecidas por dois estudantes. O aluno A_2 (Figura 38-A) utilizaria mais ou menos a ideia que o software utiliza, porém, por exemplo, para n=4, "*calcularia a área dos três retângulos e depois a área dos quatro triângulos. No final somaria tudo, resultando na área total da figura*". Já o estudante A_5, fazendo referência à atividade 19, destacou que utilizaria triângulos, "*colocando para cada retângulo um triângulo na ponta*", conforme destacado na figura 39.

Podemos notar que, intuitivamente o que foi proposto por estes estudantes é a aproximação por trapézios, outra técnica bastante utilizada para a aproximação da área de regiões curvas sob o gráfico de uma função.



(A) (B)

Figura 39 – Sugestões dos alunos A_2 e A_5 para a Atividade 20.

A Atividade 21 utilizou o mesmo procedimento adotado nas atividades 18 e 19, para aproximar a área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 9$, no intervalo [1,4], ou seja limitada pelas retas verticais $x = 1$ e $x = 4$. Os alunos conseguiram completar os questionamentos da atividade corretamente e encontraram 10,5 como aproximação da área da região descrita, conforme as aproximações fornecidas pelo software Geogebra para os parâmetros "*Soma Superior*" e "*Soma Inferior*", respectivamente, de acordo com a tabela 11.

Tabela 11: Aproximações para o valor da área descrita na Atividade 21.

	n = 5	**n = 10**	**n = 20**	**n = 50**	**n = 100**	**n =200**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior "a"	11,98	11,41	11,22	10,97	10,85	10,57	10,51	10,51
Soma Inferior "b"	9,33	9,73	9,87	10,07	10,17	10,43	10,49	10,49

Merece destaque que, o que os alunos foram orientados a fazer até essa etapa foi cálculo de algumas integrais definidas, de forma intuitiva. Observe que os resultados obtidos através das aproximações são exatamente os mesmos que seriam obtidos utilizando o cálculo de integrais na disciplina inicial de Cálculo no Ensino Superior.

Atividade 18: $\int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{64}{3} \cong 21{,}33$

Atividade 19: $\int_0^2 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3} \cong 5{,}33$

Atividade 21: $\int_1^4 (x^2 - 5x + 9)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 9x\right]_1^4$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{5.4^2}{2} + 9.4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{5.1^2}{2} + 9.1\right)$$

$$= \frac{104}{6} - \frac{41}{6} = \frac{63}{6} = 10{,}5$$

As atividades propostas na sequência desse quarto roteiro visaram apresentar aos estudantes como calcular a área da região limitada por duas funções em um intervalo [*a*,*b*], onde a e b são as abscissas dos pontos de intersecção dos respectivos gráficos.

A primeira atividade exploratória dessa etapa (Atividade 22) tinha como objetivo orientar os estudantes para o cálculo da área da região limitada entre as curvas de $g(x) = x^2$ e $f(x) = x + 6$.

Após a identificação da região, a qual se desejava calcular a área, conforme pode ser visualizado na figura 40, o procedimento adotado para a aproximação do valor da área dessa região é o mesmo que era trabalhado nas atividades anteriores, trabalhando separadamente com cada função no intervalo identificado. Com base nisso, para as funções dessa atividade, os alunos identificaram o intervalo [-2,3] já que para $x = -2$ e $x = 3$ tem-se que $f(x) = g(x)$. Assim, as aproximações obtidas pelos alunos foram:

Área da região **A1 = 32,49** | Área da região **A2= 11,63** | Área desejada: **A = A1 – A2 =20,86**

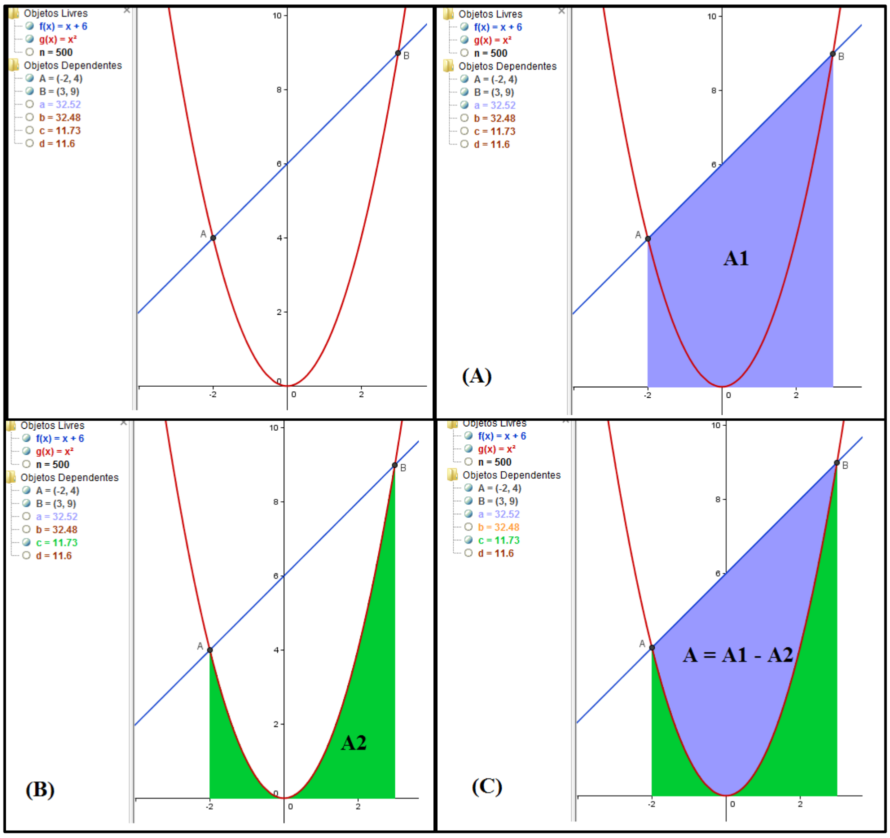


Figura 40 – Área de uma região limitada por duas funções – Atividade 22 - Construção realizada por A_{12}

De fato, mais uma vez, como estamos trabalhando com funções não negativas, podemos verificar esse resultado utilizando os conhecimentos do cálculo de integrais. Destaca-se, no entanto, que não foi apresentada essa notação e simbologia de integrais aos estudantes, apenas está se fazendo uso dessas ferramentas para justificar o trabalho desenvolvido, uma vez que os estudantes de forma intuitiva obtiveram praticamente o mesmo resultado que seria obtido através do cálculo da integral.

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{3} [(x+6) - x^2]dx = \int_{-2}^{3} (x+6)dx - \int_{-2}^{3} x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left[\left(\frac{3^2}{2} + 6.3\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6.(-2)\right)\right] - \left[\frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{65}{2} - \frac{35}{3} = 32{,}5 - 11{,}67 \cong 20{,}83$$

As mesmas conclusões podem ser tiradas nas atividades 23 e 24. Observe na figura 41, os passos adotados pelos alunos, como se pode observar na figura 41, a exemplo de A_4, para a determinação da área da região limitada entre as curvas $f(x) = 4$ e $g(x) = x^2 - 4x + 4$, obtendo 10,68 unidades de área como aproximação.

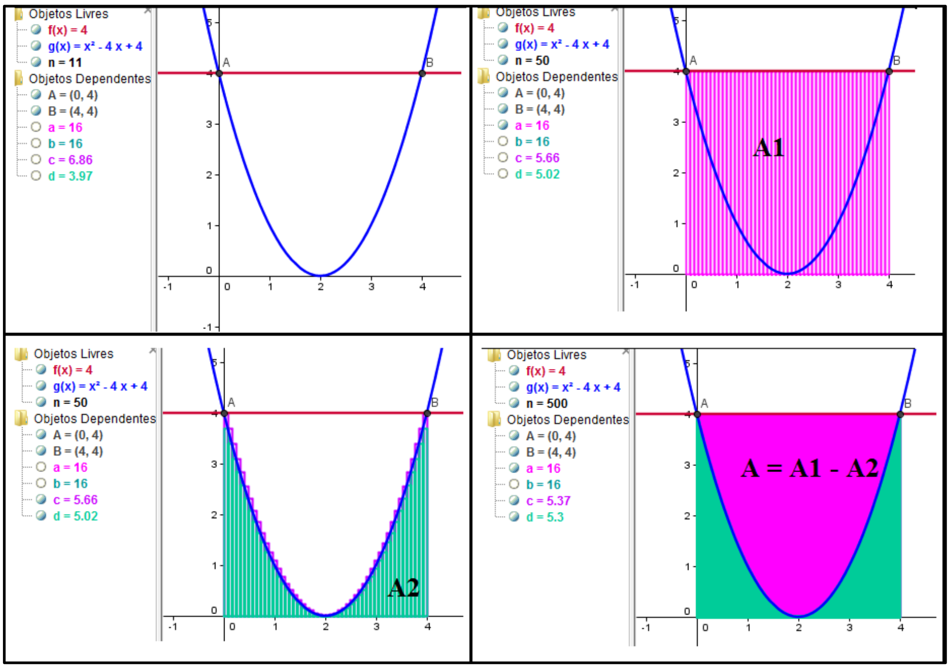


Figura 41 – Área da região descrita na atividade 23 (Construção realizada por A_4).

Para essa questão os alunos identificaram o intervalo [0,4] já que para $x = 0$ e $x = 4$ tem-se que $f(x) = g(x)$ e obtiveram as aproximações abaixo:

Área da região **A1 = 16** | Área da região **A2= 5,32** | Área desejada: **A = A1 – A2 =10,68**

A atividade 24 pedia para calcular a área limitada por duas funções quadráticas, a primeira $f(x) = 8 - x^2$, côncava para baixo, e a segunda $g(x) = x^2$, com concavidade voltada para cima. Acompanhe na figura 42 as áreas identificadas pelos alunos, como exemplo o que foi feito pelo aluno A_2 e procedimento utilizado para o cálculo.

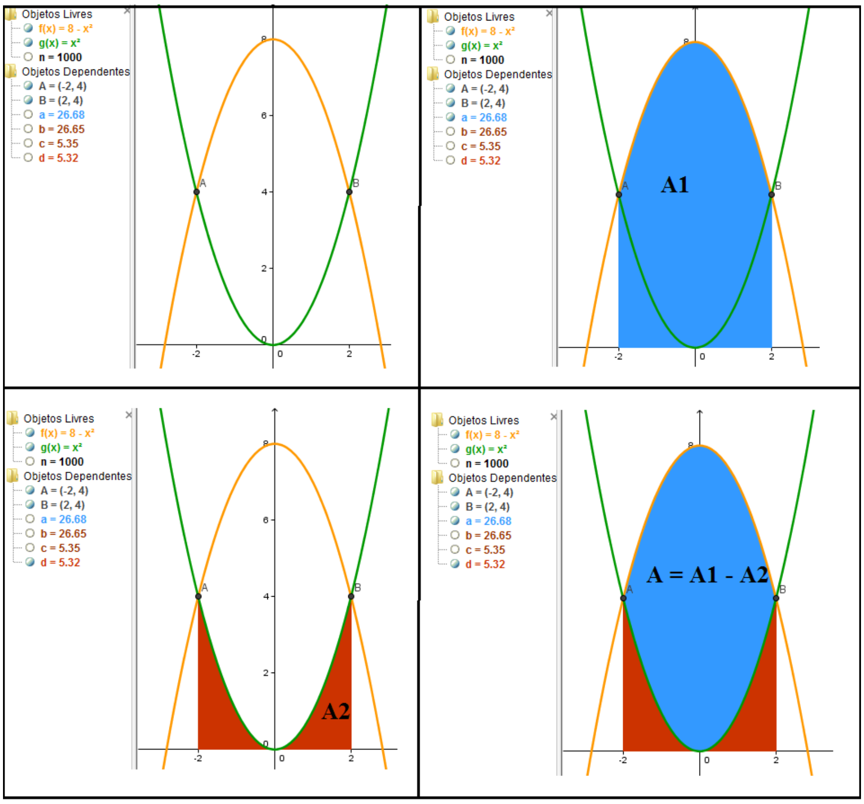


Figura 42 - Área da região descrita na atividade 24 (Construção realizada por A_2).

Para essa questão os alunos identificaram o intervalo [-2,2] já que para $x = -2$ e $x = 2$ tem-se que $f(x) = g(x)$ e obtiveram as aproximações abaixo:

Área da região **A1 = 26,65** | Área da região **A2= 5,32** | Área desejada: **A = A1 – A2 =10,68**

Apesar da análise sucinta que foi apresentada nas últimas atividades, merece destaque, que todas elas buscavam explorar a ideia de aproximação das áreas das regiões definidas em cada exercício, conforme pode ser percebido ao analisar o Anexo D. A ideia intuitiva de "*integral definida"* foi trabalhada a partir da observação e da experimentação proporcionada pelo software Geogebra, de modo que os alunos pudessem perceber que, quanto maior o número de retângulos considerados, melhor seria a aproximação para o valor da área desejada.

A avaliação desse roteiro por parte dos estudantes evidencia que os objetivos traçados para o mesmo foram alcançados. Os estudantes foram capazes de estender o conceito de área de figuras regulares planas para o cálculo de áreas de regiões delimitadas por gráficos de funções, no caso, funções de 1º e 2º grau. Além disso, conseguiram, com auxílio do recurso computacional, calcular a área da região, limitada, abaixo da curva do gráfico de uma função e acima do eixo OX, através da soma da área de retângulos abaixo e acima da curva, por aproximações sucessivas, de acordo com o aumento do número de retângulos.

5.5 Roteiro de atividades complementares: Avaliação Final

Depois que os estudantes realizaram todas as atividades disponibilizadas nos quatro roteiros, que acabamos de analisar, percebeu-se a necessidade de avaliar todo o trabalho que foi desenvolvido. Para isso, organizou-se um material, apresentado no Anexo E, o qual explora os principais conceitos que foram trabalhados com auxílio do software Geogebra. Participaram dessas atividades os doze alunos que estavam presentes no último encontro.

Para a resolução das cinco atividades complementares de avaliação, os estudantes foram orientados a resolver e registrar as informações no material que receberam, sem ajuda, somente manipulando o software. Com isso pretendia-se avaliar se os estudantes dominavam a sintaxe do software e se foram capazes de compreender intuitivamente, através das atividades, os principais tópicos estudados nas disciplinas iniciais de Cálculo Diferencial e Integral do Ensino Superior, ou seja, as ideias de limites, velocidade média e velocidade instantânea (a noção intuitiva de derivada) e a área sob o gráfico de uma função em um intervalo (a noção intuitiva de integral definida).

Nas três primeiras atividades complementares, os estudantes depois de construírem no Geogebra o gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$, precisavam determinar o limite dessa função para *x* tendendo a 2, pela esquerda e pela direita e os limites para *x* tendendo a $+\infty$ e $-\infty$. Para cada limite precisavam apresentar (ou completar) a justificativa para a resposta obtida. Acompanhe, no quadro abaixo, a análise dessa questão.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR	COMENTÁRIOS
1) Calcular e interpretar o limite: $$\lim_{x \to 2}(-x^2 + 9) = 5$$	Somente os alunos A_{11} e A_{13} erraram o valor do limite. Além disso, preencheram as tabelas da atividade incorretamente, confundindo-se com a função $f(x) = (-x)^2 + 9$.
2)Calcular e interpretar o limite: $$\lim_{x \to +\infty}(-x^2 + 9) = -\infty$$	Entre os alunos, oito apresentaram respostas totalmente corretas acerca do cálculo e da interpretação desse limite. Algumas justificativas desses estudantes: "*Na medida em que os valores de x crescem, os valores de f(x) decrescem muito*". (A_2) "*Conforme os valores de x crescem os valores de f(x) diminuem*". (A_{14}) "*Na medida em que os valores de x crescem cada vez mais, os valores de f(x) diminuem cada vez mais*". (A_1) "*Os valores de f(x) diminuem na medida em que os valores de x crescem*". (A_8) Os alunos A_5 e A_4 apesar de terem acertado o tem anterior, confundiram-se com o sinal negativo e, juntamente com os alunos A_{11} e A_{13} apresentaram respostas incorretas.
3) Calcular e interpretar o limite: $$\lim_{x \to -\infty}(-x^2 + 9) = -\infty$$	Os alunos que não acertaram o item anterior também apresentaram respostas incorretas a esse item. Além deles, os alunos A_3 e A_6, também consideraram os sinais trocados nesse item. Desta forma, somente seis alunos (50%) obtiveram êxito na obtenção e na interpretação correta desse limite. Algumas justificativas apresentadas: "*Na medida em que os valores de x decrescem os valores de f(x) diminuem também*". (A_{14}) "*Os valores de f(x) diminuem na medida em que os valores de x decrescem*". (A_8)

Figura 43 – Quadro: Conclusões das atividades complementares 1, 2 e 3.

A atividade complementar 4 buscou explorar os conceitos desenvolvidos ao longo do terceiro roteiro de atividades, ou seja, velocidade média, velocidade instantânea, pontos de máximo ou mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento. Após a construção sugerida na atividade (conforme figura 44) os alunos precisavam responder aos seguintes itens:

a) Quais as coordenadas do ponto P, cuja reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, fornece coeficiente angular igual a zero?

b) Qual a velocidade média do objeto no intervalo [1,2]?

c) Qual a velocidade do objeto no instante $x = 2$? Justifique sua resposta.

d) A função $f(x) = -x^2 + 9$ possui ponto de máximo ou mínimo?

e) Quais as coordenadas do ponto de máximo ou mínimo da função?

f) Qual intervalo do domínio fornece coeficiente angular positivo da reta tangente ao gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$?

g) Qual intervalo do domínio que fornece o coeficiente angular negativo da reta tangente ao gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$?

h) Qual é o intervalo de Crescimento da função $f(x) = -x^2 + 9$?

i) Qual é o intervalo de Decrescimento da função $f(x) = -x^2 + 9$?

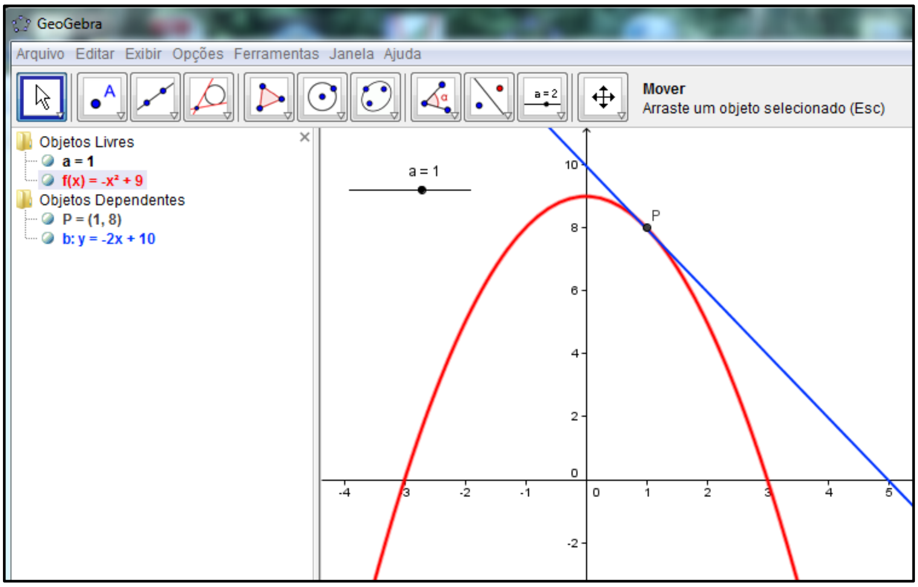


Figura 44 – Construção exigida na atividade complementar 4.

A tabela 12 apresenta o desempenho dos estudantes nessa atividade, de acordo com as respostas esperadas. Os itens errados por cada estudante aparecem marcados com (E) e os itens respondidos corretamente com (C). Os alunos A_9 e A_{10} não participaram da atividade avaliativa.

Tabela 12 – Análise da atividade complementar 4

Item	**Resposta Correta**	**ALUNOS**											
		A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**	**A_{11}**	**A_{12}**	**A_{13}**	**A_{14}**
a)	**P=(0,9)**	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
b)	**- 3 m/s**	C	C	**E**	C	C	**E**	C	C	C	C	C	**E**
c)	**- 4 m/s**	C	C	C	C	C	C	C	C	**E**	C	**E**	C
d)	**Ponto de Máximo**	C	C	C	C	C	C	C	C	**E**	C	**E**	C
e)	**P=(0,9)**	C	C	**E**	C	**E**	C	C	C	**E**	C	**E**	**E**
f)	$(-\infty, \mathbf{0})$	C	C	C	**E**	**E**	C	C	C	C	**E**	C	**E**
g)	$(\mathbf{0}, +\infty)$	C	C	C	**E**	**E**	C	C	C	C	**E**	C	**E**
h)	$(-\infty, \mathbf{0})$	C	C	C	C	C	C	C	C	C	**E**	C	C
i)	$(\mathbf{0}, +\infty)$	C	C	C	C	C	C	C	C	C	**E**	C	C

Analisando a tabela, podemos verificar que em geral, o desempenho dos estudantes foi bom, nos itens analisados. Em especial, em relação ao cálculo da velocidade média no intervalo [1,2] conforme o item (b), os alunos que erraram apresentaram como resposta *3 m/s*, esquecendo de considerar o sinal durante o seu cálculo já que, tem-se $A = (1, f(1)) = (1{,}8)$ e $B = (2, f(2)) = (2{,}5)$. Assim: $V_{méd} = \frac{5-8}{2-1} = -3m/s$.

Em relação ao cálculo da velocidade no instante $x = 2$, ao considerar a equação dada, como a equação do movimento de um objeto, os alunos A_{11} e A_{13} não conseguiram estabelecer as relações existentes entre a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em determinado ponto com a velocidade instantânea naquele ponto. Os demais estudantes apresentaram justificativas de acordo com as ideias trabalhadas, demonstrando bom entendimento desse conceito, como por exemplo:

"*É -4, pois é o coeficiente angular da reta y=-4x+13 no ponto P=(2,5)*". (A_8)

"*A velocidade é -4m/s, pois é o valor do coeficiente angular da reta tangente no ponto P=(2,5)*". (A_4 e A_5)

"*A velocidade instantânea no ponto x=2 é -4, pois é o valor do coeficiente da reta tangente neste ponto*". (A_7)

Nos itens **f**, **g**, **h** e **i**, consideramos correta a apresentação do intervalo fechado em zero, apesar de, neste ponto, a reta tangente ser paralela ao eixo OX e possuir coeficiente angular igual a zero. Na verdade, até *x=0* podemos considerar que a função $f(x) = -x^2 + 9$ cresce e, de forma análoga, a partir de *x=0* podemos considerar que a função decresce.

Portanto, pode-se perceber que as ideias de velocidade média, velocidade instantânea, ou seja, taxas de variação, de reta tangente e a análise do comportamento do gráfico de uma função a partir das variações no coeficiente angular dessa reta, foram compreendidas pela maioria dos estudantes participantes das atividades. Destaca-se também que esses conceitos poderiam ser trabalhados, aos poucos, juntamente com o estudo das demais funções estudadas no Ensino Médio, de modo que ao final dessa série, o estudante possa estabelecer relações mais concretas sobre a aplicação desses tópicos da matemática.

A última atividade complementar de avaliação explorou o cálculo da área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico dessa função e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 3$. Para essa atividade os alunos deveriam utilizar os comandos "*soma superior*" e "*soma inferior*" do Geogebra, como haviam trabalhado no decorrer do quarto roteiro de atividades. Observe na figura 45 a construção realizada pelo aluno A_5.

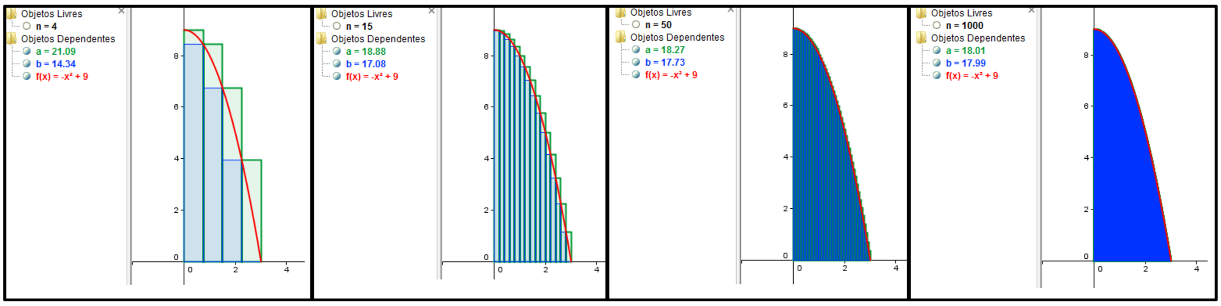


Figura 45 – Aproximação da área descrita na Atividade Complementar 5 (feita por A_5).

Dos doze alunos, dez conseguiram completar os questionamentos da atividade corretamente e encontraram 18 unidades de área como aproximação da área da região descrita. No entanto, os alunos A_{11} e A_{13} inseriram incorretamente o intervalo considerado, logo suas aproximações não se referiam à área definida no exercício.

Acompanhe na tabela 13 as aproximações fornecidas pelo software Geogebra para os parâmetros "*Soma Superior*" e "*Soma Inferior*" para a função $f(x) = -x^2 + 9$ no intervalo [0,3].

Tabela 13 - Aproximações para o valor da área descrita na atividade complementar 5.

	n = 5	**n = 10**	**n = 20**	**n = 50**	**n = 100**	**n =200**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior "a"	20,52	19,62	19,31	18,88	18,66	18,13	18,03	18,01
Soma Inferior "b"	15,12	16,24	16,61	17,08	17,31	17,86	17,97	17,99

Observe que o resultado obtido, através das aproximações, é exatamente o mesmo que se obtém ao calcular a integral definida:

$$\int_0^3 (-x^2 + 9)dx.$$

De fato:

$$\int_0^3 (-x^2 + 9)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 9x\right]_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 9.3\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 9.0\right) = -9 + 27 = 18$$

A partir das atividades avaliativas podemos verificar que os estudantes alcançaram os objetivos propostos para essa etapa, sem apresentar dificuldades significativas. Destaca-se que, embora as atividades tenham sido aplicadas fora do contexto de uma turma regular de alunos do primeiro ano do Ensino Médio, é possível desenvolver atividades semelhantes aliadas ao estudo de funções no decorrer do ano letivo. Percebe-se que a utilização do software foi um ponto positivo da realização das atividades, motivando os estudantes e fazendo com que participassem ativamente das atividades propostas.

6. AVALIAÇÃO NO PONTO DE VISTA DOS ESTUDANTES

Depois da realização de todas as atividades, como forma de registrar as opiniões dos estudantes acerca das atividades, do material elaborado e dos recursos utilizados, os mesmos responderam a um questionário (Anexo G). A avaliação no ponto de vista dos estudantes foi realizada a seguir a partir das informações recolhidas.

6.1 Avaliação do Questionário

O questionário elaborado foi organizado em duas partes principais: uma delas com o objetivo de avaliar o material que foi entregue aos estudantes e levantar sugestões para o aperfeiçoamento do mesmo. A segunda parte buscou avaliar o envolvimento dos participantes, bem como o desenvolvimento de todas as atividades e o entendimento dos conceitos matemáticos que eram foco do trabalho. O questionário foi respondido pelos doze alunos que participaram de todos os encontros.

Sobre o material elaborado, os alunos atribuíram uma nota de 0 (zero – nota mínima) a 10 (dez – nota máxima) para cada item avaliado. Na tabela 16 apresentamos a nota atribuída por cada estudante, bem como a média final (MF) calculada para cada item.

Tabela 14 – Avaliação do material elaborado para as atividades

Item analisado	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**	**A_{11}**	**A_{12}**	**A_{13}**	**A_{14}**	**MF**
Linguagem utilizada e texto explicativo	10	9	8	9	8	9	10	10	10	9	8	10	**9,2**
Organização do material	9	8	10	8	8	10	10	10	9,5	10	8	9	**9,1**
Clareza e objetividade	10	9	10	9	7	10	10	10	10	10	8	10	**9,4**
Sequência e desenvolvimento das atividades	10	10	10	10	9	10	9	10	10	10	8	7	**9,4**

Percebe-se que no ponto de vista dos estudantes, o material elaborado utilizava uma linguagem acessível, clara e objetiva, com um bom texto explicativo e que seguia uma sequência lógica para o desenvolvimento do trabalho, que possibilitava o acompanhamento e o entendimento das atividades por parte dos alunos. Além disso, os estudantes foram convidados a dar sugestões para a melhoria da escrita e da organização do material impresso que receberam. As sugestões dos estudantes foram:

- Acrescentar a numeração nas páginas do material;
- Acrescentar exemplos resolvidos e mais gráficos na parte referente ao estudo da reta tangente;
- Realizar uma correção ortográfica;
- Apresentar exemplos prontos no material para ter uma referência mais precisa.

Em relação ao envolvimento dos estudantes, observe na tabela 15 a nota que eles mesmos se atribuíram e as respectivas justificativas.

Tabela 15 - Avaliação do envolvimento, dedicação e participação dos alunos

Aluno	**Nota**	**Justificativa**
A_1	10	*"Procurei me empenhar ao máximo em todas as aulas propostas".*
A_2	9	*"Participei de todas as aulas, sempre buscando o melhor, mas as vezes fazia comentários desnecessários".*
A_3	8	*"Participei nas aulas, questionei, mas podia ter me comprometido mais".*
A_4	9	*"Me envolvi com interesse nas atividades, com dedicação ao máximo e demonstrando uma boa participação".*
A_5	8	*"Tiveram algumas coisas, alguns conceitos e exemplos que eu não consegui entender direito".*
A_6	9	*"Porque eu fiz todas as atividades pedidas".*
A7	8	*"Pois em algumas aulas não estava com muita vontade de fazer as questões e não conseguia acompanhar os colegas".*
A_8	8	*"Muitas vezes ficava conversando e acabava não entendendo a matéria".*
A_{11}	10	*"Pois eu me dediquei ao máximo".*
A_{12}	10	*"Pois me esforcei para o entendimento".*
A_{13}	8	*"Pois no começo não me lembrava como fazia as contas e tive um pouco de dificuldade".*
A_{14}	8	*"Pois tentei me esforçar mas de vez em quando conversava".*

Na sequência, ao serem questionados sobre o Software Geogebra, todos afirmaram não conhecer esse recurso, porém a maioria dos estudantes (10 entre 12) achou fácil ou muito fácil a utilização do software e suas ferramentas. Entre as justificativas citadas estão a facilidade de visualização dos gráficos, a reunião de informações na tela do Geogebra, a facilidade e rapidez para encontrar as informações procuradas e a disposição dos comandos na tela inicial do software.

As perguntas seguintes referiam-se a utilização do aplicativo para o entendimento dos conceitos matemáticos trabalhados no decorrer de cada encontro. A tabela 16 apresenta a opinião dos estudantes sobre cada tópico.

Tabela 16 – A contribuição do Geogebra para o entendimento dos conceitos abordados

	Sim, muito.	**Sim, um pouco.**	**Não, nada.**
O Geogebra ajudou a visualizar os conceitos de limite de uma função quadrática para *x* tendendo a um valor ou para *x* tendendo a $+\infty$ ou $-\infty$ e o limite de uma sequência de números reais?	**10 alunos**	**2 alunos**	**Nenhum**
O Geogebra ajudou a visualizar as construções que buscavam abordar os conceitos de Velocidade Média (variação média) e Velocidade Instantânea (variação instantânea)?	**5 alunos**	**7 alunos**	**Nenhum**
O Geogebra ajudou a visualizar o conceito de área de uma região limitada pelo gráfico de uma função positiva, limitada por uma reta vertical e pelo Eixo OX, bem como limitada por duas funções em um intervalo determinado do domínio?	**8 alunos**	**4 alunos**	**Nenhum**

As respostas fornecidas pelos estudantes indicam a familiarização dos mesmos com o software e o favorecimento da aprendizagem dos conceitos intuitivos de limites, derivadas e integrais definidas, bem como tópicos relativos ao estudo de funções. Dessa forma, é possível enriquecer o processo de ensino-aprendizagem de modo a melhorar a qualidade do ensino de matemática no Ensino Médio, inclusive com a inserção de um recurso computacional de alta relevância e aplicabilidade como se mostrou o Geogebra.

Todos os alunos acreditam que as atividades desenvolvidas com base no estudo das funções quadráticas e lineares com foco nas ideias intuitivas do Cálculo, contribuíram para enriquecer os conhecimentos que já possuíam, através de atividades bastante interessantes e desafiadoras. Além disso, todos os alunos acreditam que o software Geogebra poderia auxiliar no entendimento do comportamento e das propriedades dos gráficos de funções estudados na primeira série do ensino médio. Veja algumas justificativas dos alunos para essa afirmação:

"*É um jeito mais fácil e divertido de fazer, então as pessoas iriam se interessar mais*". (A_8)

"*Assim, nós poderíamos usar o recurso do computador, também não precisaria fazer aqueles cálculos gigantes*".(A_6)

"*Ele (o software) contém praticamente todos os conteúdos aplicados em aula, então se esses conteúdos fossem aplicados no Geogebra, acredito que seria muito mais interessante e também um ensino de maior qualidade*". (A_4)

"*Seria uma maneira prática e rápida para ensinar aos alunos sobre propriedades dos gráficos*". (A_1)

"*Pois facilitaria muito tendo a visualização de gráficos mais exatos e o conhecimento do aluno, com certeza seria maior*". (A_2)

No último questionamento os estudantes podiam fazer comentários, expressar sua opinião, dar sugestões, etc., acerca das atividades que havia participado. Deveriam também citar quais eram suas expectativas quando foram convidados a participar desse "minicurso" e se as mesmas foram alcançadas. As respostas indicam que os estudantes aproveitaram a oportunidade para enriquecer seus conhecimentos matemáticos e destacam outros pontos positivos como a utilização do Geogebra, a aplicação dos conteúdos trabalhados em sala de aula, a aquisição de novos conceitos matemáticos, entre outras coisas que serão citadas nas falas abaixo.

"*Esse curso foi muito bom pois aprendi melhor o que são as funções quadráticas. Achei que iria aprender um pouco mas ao final do curso aprendemos muitas coisas que eu não aprendi na escola. E por meio deste software é muito mais fácil aprender pois não é enjoativo e se errar é fácil de ver o erro e calcular com muito mais precisão do que manualmente, é muito mais rápido e eficiente*." (A_{12})

"*Achei esse 'curso' muito legal e foi um desafio que foi cumprido, mas muito divertido. Foi muito melhor do que eu esperava, achei que era só mais umas aulas de matemática, mas, além disso, é muito interessante e com várias maneiras de resolver*." (A_8)

"*Gostei bastante desse 'minicurso' todas as atividades me fizeram entender todos os conceitos e ideias pretendidos. Eu esperava que só íamos revisar o que já tínhamos aprendido sobre funções mas com a realização do curso consegui aprender várias coisas a mais*."(A_5)

"*Gostei muito de participar deste 'minicurso', de conhecer* o software *Geogebra, de aplicar conceitos que aprendíamos em sala de aula neste software. Minha expectativa era que teríamos novas experiências sobre os conceitos matemáticos e foram muito bem atendidas*."(A_1)

O último comentário, realizado pelo aluno A_2 sintetiza o objetivo prático de todo esse trabalho, inserir as ideias intuitivas do cálculo diferencial e integral no ensino médio, para tentar minimizar, em longo prazo, as dificuldades apresentadas pelos estudantes das disciplinas de Cálculo.

"*Eu acho que o que eu aprendi fazendo esse minicurso ninguém mais tira de mim, pois foi um conhecimento novo que ganhei e jamais esquecerei. Minhas expectativas foram totalmente atendidas*". (A_2)

Nota-se que a fala desse aluno remete à epígrafe desse trabalho: "A mente que se abre a uma nova ideia, jamais retorna ao seu tamanho original" de *Albert Einstein*.

Acredita-se que abordagens relativas ao estudo de funções relacionadas com a forma como foram propostas por este trabalho, possam ampliar o olhar de cada estudante e fazer com que cada um aprenda de forma mais significativa os conceitos matemáticos necessários para seguir em seus estudos futuros, mesmo que não pretendam realizar nenhum curso universitário na área de ciências exatas ou tecnologia.

CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo avaliar a possibilidade e a necessidade da inserção das noções intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, ainda no primeiro ano, aliado ao estudo de funções. Pode-se verificar que ao deixar de trabalhar essas ideias, ainda no ensino médio, se perde uma ótima possibilidade de ampliar o conhecimento dos estudantes e de mostrar a aplicação dos conceitos matemáticos que estão presentes no currículo desse ano.

Vimos que as atividades propostas, podem ser inseridas dentro do desenvolvimento dos programas de ensino já existentes, adaptando as abordagens aos conteúdos e proporcionando aos estudantes um ensino baseado na experimentação, na visualização e na aplicação dos conceitos estudados. Os problemas geradores do cálculo, ou seja, o problema da velocidade instantânea, o problema da reta tangente e o problema do cálculo da área de regiões limitadas por curvas, que foram abordados no decorrer desse trabalho, puderam ser trabalhados de maneira bastante intuitiva com o auxílio do software Geogebra.

Além disso, o entendimento e o trabalho com limites, através de processos infinitos de aproximação, aplicado ao estudo de funções pode facilitar o entendimento do comportamento do gráfico de cada tipo de função. As progressões geométricas e aritméticas, no estudo de sequências, também se mostraram boas oportunidades de trabalho com o conceito de limite, através da análise do termo geral de cada sequência. Os demais conteúdos desenvolvidos neste ano de escolaridade também podem ser favorecidos através de atividades como as que foram propostas no decorrer desse trabalho, de modo a favorecer a aprendizagem da matemática.

O conceito intuitivo de derivada de uma função em um ponto através da construção e do entendimento do conceito de reta tangente ao gráfico de uma função e da análise do coeficiente angular dessa reta, também foram assuntos entendidos pelos estudantes. Verificou-se que é possível ensinar esse conceito aos estudantes ainda no primeiro ano do Ensino Médio. Além disso, o significado e o cálculo da velocidade instantânea também foram assuntos motivadores para os estudantes, que questionaram e procuraram entender a aplicação desse assunto na prática, como foi o caso do questionamento de um dos estudantes acerca da velocidade registrada pelos radares e lombadas eletrônicas.

Em relação ao cálculo da área sob o gráfico de uma função em um intervalo determinado do seu domínio, os estudantes se mostraram bastante interessados, principalmente pelas ferramentas disponíveis no software Geogebra. Sem dificuldades, conseguiram compreender a ideia de aproximar a área utilizando um número cada vez maior de figuras geométricas conhecidas como retângulos ou trapézios, que foi a sugestão dos estudantes durante as atividades. O processo infinito de aproximação esteve presente nas justificativas dos estudantes, durante todo o processo, de modo que é possível afirmar que eles compreenderam a ideia intuitiva do cálculo da integral definida das funções apresentadas nas atividades para o intervalo considerado em cada caso.

Acredita-se que uma maior atenção à aplicação, à experimentação e a visualização dos conceitos matemáticos nesta fase da escolaridade, pode reverter o quadro de dificuldades e altos índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo no Ensino Superior. A disciplina de Cálculo é responsável por um grande número de reprovações e desistências de alunos nos cursos de graduação, uma vez que os mesmos, ao ingressarem em um curso superior na área das Ciências Exatas e Tecnologia, se deparam com atividades muitas vezes sem contextualização e já aprofundadas, sem este estudo prévio, ou seja, sem a construção das ideias fundamentais para a compreensão da disciplina em questão.

Atividades elaboradas com o objetivo de introduzir esses conceitos intuitivos no Ensino Médio podem ampliar o olhar do estudante, durante o estudo de funções, de modo que, com a introdução dessas ideias intuitivas, seus estudos posteriores sejam facilitados. Destaca-se ainda que, as atividades que foram propostas podem ser adaptadas para o estudo das demais funções além das funções de 1º e 2º graus, como exponenciais, logarítmicas, polinomiais de outros graus, bem como, funções trigonométricas (conteúdo geralmente incluído no currículo do 2º ano do Ensino Médio).

Durante o desenvolvimento desse trabalho verificou-se a necessidade de propor alternativas para sanar as dificuldades que se apresentavam no ensino de cálculo. O Cálculo aplicado ao estudo de funções quadráticas no Ensino Médio, com base nas atividades aplicadas e analisadas, se mostrou necessário para um melhor aproveitamento dos conteúdos trabalhados nesse ano de escolaridade. Mais do que isso, percebeu-se com esse trabalho que o aluno do Ensino Médio espera mais do que conceitos, exercícios e fórmulas, ele espera que a matemática e as outras disciplinas estudadas, adquiram aplicação, utilidade, e que a partir dos novos conhecimentos ele possa decidir sobre o que deseja para seu futuro.

Justamente nesse sentido, este trabalho procurou apresentar uma proposta diferenciada para o ensino de Matemática aliada a experimentação e à visualização, utilizando e citando aplicações dos conteúdos na Física e em situações reais. Além disso, se tentou aliar a esses objetivos e às atividades propostas, a utilização de um recurso computacional. Acredita-se que grande parte da aceitação e do bom desempenho dos estudantes nas atividades propostas deve-se à utilização desse recurso dinâmico e repleto de aplicabilidade para os conceitos matemáticos.

Um ponto de destaque do trabalho refere-se também ao fato de que com as atividades propostas, os estudantes foram estimulados a buscar as soluções por meios próprios, e somente após isso, fazia-se a sistematização de algumas dessas conclusões. Também, as atividades instigavam os alunos a refletirem sobre as etapas de resolução e também a fazerem previsões do que deveria acontecer, de acordo com a proposta de abordagem de cada noção intuitiva do cálculo que estava sendo abordada.

Por essa razão acredita-se que, o que foi proposto se constitui numa estratégia de ensino e aprendizagem que contribui para a melhoria do ensino de Matemática. Percebe-se que para um entendimento mais efetivo desses conteúdos é necessário que seja realizada uma abordagem diferenciada do que, em geral, é a praticada em sala de aula, ou seja, desvinculada da realidade e sem sentido, para os estudantes, como foi revelado pelos próprios estudantes no questionário inicial.

Tornar a matemática mais fácil e possível de ser compreendida pode ser uma tarefa intimamente ligada à metodologia adotada para se ensinar cada conteúdo. Com certeza, se o professor buscar relacionar os conteúdos com situações reais, que exijam dos estudantes a reflexão e o raciocínio, a partir de contextos que, para ele, façam sentido, um obstáculo das dificuldades em Matemática, já está sendo vencido. Isso já representa um passo em busca da melhoria no rendimento dos estudantes nessa disciplina, seja no Ensino Médio ou Superior.

Além disso, acredita-se que inserir as ideias intuitivas do Cálculo no Ensino Médio, apesar de ser necessário e possível, de acordo com o que foi evidenciado pela análise das atividades resolvidas pelos estudantes que fizeram parte desse estudo, depende ainda de outros fatores, inclusive do preparo do professor de matemática que atende aos alunos do Ensino Médio. É necessário investir na formação continuada dos professores de matemática de forma a melhorar a qualidade do ensino dessa disciplina.

Para que o professor trabalhe as ideias intuitivas do cálculo no Ensino Médio, é necessário que ele domine esses conceitos e que perceba a necessidade de ampliar os horizontes do ensino da matemática, para a aplicação e para a utilização dos recursos disponíveis para melhor desenvolver suas atividades. Acredita-se que programas como o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que investe na formação dos professores, representa um grande avanço para a melhoria da qualidade do ensino de matemática na Educação Básica do país.

No decorrer dos encontros com os estudantes, foi possível relacionar vários aspetos de real aplicação com os problemas e atividades que eram realizados, e percebeu-se que isto fez sentido para os estudantes, na medida em que eles conseguiam fazer as relações e concluir sobre o que se pedia. Com certeza, ficaram lacunas em função do tempo que se tinha para realizar as atividades e da quantidade de trabalho que havia sido programado para cada encontro. Apesar disso, o trabalho foi satisfatório e decisivo: é possível e necessário inserir as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral, aplicado ao estudo de funções ainda no primeiro ano do Ensino Médio.

De fato, a experiência realizada não verifica se os resultados seriam os mesmos para uma turma regular de alunos do Ensino Médio, uma vez que os alunos que formaram a turma experimental aceitaram antecipadamente participar dessa experiência. Apesar disso, acredita-se que, da mesma forma como esses estudantes se mostraram empolgados e demonstraram interesse nas atividades de aplicação e na utilização do software, os estudantes de uma turma regular podem se mostrar abertos a novas abordagens para os conceitos matemáticos. Além disso, as atividades podem ser selecionadas e exploradas aos poucos durante o estudo de cada uma das funções e demais conteúdos que integram o currículo de matemática do Ensino Médio.

Por fim, destaca-se que este trabalho tem por objetivo fornecer ideias, dar sugestões para o trabalho desses assuntos no Ensino Médio, as quais possam servir de inspiração para professores, no momento do planejamento de suas atividades. O professor que desejar, pode fazer o uso das atividades aqui sugeridas na íntegra, ou ainda, selecionar as atividades conforme sua necessidade para o desenvolvimento de suas aulas de matemática. Um possível desdobramento do que está sendo proposto pode ser feito e aplicado a outras funções, ou ainda, pode-se aplicar essas atividades ou outras, com objetivos semelhantes, e acompanhar o desempenho dos estudantes de uma turma regular do Ensino Médio na execução das mesmas.

Espera-se colher os frutos dessas iniciativas na melhoria da qualidade do ensino de matemática no país.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte.** 6 ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARAÚJO, Marcelo. Velocidade Instantânea X Velocidade Média. **Paraná online**, Paraná, 03 maio 2010. Disponível em: http://abetran.org.br/index.php?option=com_content&task=view&id=14287&Itemid=77. Acesso em: 25 nov. 2012.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2° grau**.** In: **Revista do Professor de Matemática**, n° 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p. 1-9.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Matemática. In: **Revista do Professor de Matemática**, nº 23. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1993, p. 1-7.

ÁVILA, Geraldo. Limites e Derivadas no Ensino Médio? In: **Revista do Professor de Matemática**, n° 60. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p. 30-38.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto.**Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – PCNEM. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **PCN+, Ensino Médio**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.

CAMARGO, Vera Lúcia Vieira. **Atividades do Cálculo Diferencial e Integral com auxílio do Software Geogebra**. In: IV Seminário de Informática na Educação,2009. Mato Grosso: UNEMAT, 2009.

DUCLOS, Robert Costallat. Cálculo do 2º grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n.20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. Vol.1: versão progressões. São Paulo: FTD, 2000.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol.1. 5ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2011.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções**, 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral**, 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, Gelson; et. al. **Matemática: ciência e aplicações**, vol. 1 – Ensino Médio. 4. ed. São Paulo: Atual, 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio**, vol.1, 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Coleção do Professor de Matemática, SBM: Rio de Janeiro, 2007.

MACHADO, Nílson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário**. São Paulo: USP, 2008. Disponível em http://www.nilsonmachado.net/sema20080311.pdf . Acesso em 25 jul. 2012.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica, In: MACHADO, N. ; CUNHA, M. (org). **Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios epistemologia e didática**. Escrituras: São Paulo, 2003. Disponível em: http://www.nilsonmachado.net/lca19.pdf . Acesso em 18 set. 2012.

SBM. **Fundamentos de Cálculo**. Material disponibilizado ao PROFMAT, 2012.

SIMÕES, Márcio. Cálculo sem pressa é bom. **Cálculo: Matemática para todos**. SEGMENTO: São Paulo, ed. 13, ano 2, p.24 – 33, 2012.

STEWART, James. **Cálculo 1.** 4 ed., Vol 1 e 2, São Paulo: Pioneira, 2001.

TIPLER, Paul A. **Física**: Mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Vol.1.

ANEXOS

Anexo A – Roteiro de Atividades – Parte 1

Com as atividades propostas nesta etapa, o aluno será capaz de:

- Conhecer o software GeoGebra e sua sintaxe, bem como utilizar algumas de suas funções;
- Construir gráficos de funções de 1º e 2º graus;
- Calcular e interpretar o coeficiente angular de uma reta como razão entre as variações dos valores de *y* e *x* de uma função do 1ºgrau.
- Revisar as principais características da função quadrática.

Conhecendo e explorando o Geogebra

O Geogebra é um software livre, disponível para download no endereço: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR, de fácil manipulação, que possibilita integrar geometria, álgebra e cálculo, conforme Camargo (2009). Dessa forma é possível explorar nesse programa, de formas variadas (graficamente, algebricamente e numericamente), uma mesma situação matemática e relacionar os conceitos envolvidos através dos recursos de visualização e movimentação que estão disponíveis. Com ele podemos construir e identificar diversos entes matemáticos.

No decorrer das atividades desse trabalho, serão abordadas as principais funções do Geogebra, relacionadas ao estudo de funções, principalmente às funções lineares e funções quadráticas.

Conhecendo o Geogebra

A tela inicial do Geogebra apresenta a área gráfica, onde aparecem os entes matemáticos, conforme os comandos que o usuário fornece ao programa. Além disso, ela traz uma caixa de ferramentas com diversas funções em cada um dos botões apresentados, bem como apresenta uma caixa algébrica, a qual deixa visível todo objeto matemático que foi inserido na janela gráfica, com suas respectivas coordenadas e seus valores.

Observe, na Figura 1.1, a página inicial do Geogebra com destaque para as janelas algébrica e gráfica, a barra de ferramentas e a barra de entrada de comandos.

Figura 1.1 - Janela inicial do Geogebra

Agora, vamos conhecer, na prática, algumas opções da barra de ferramentas. Para isso observe a numeração indicada para cada botão na figura 1.2, para facilitar a referência a cada ferramenta.

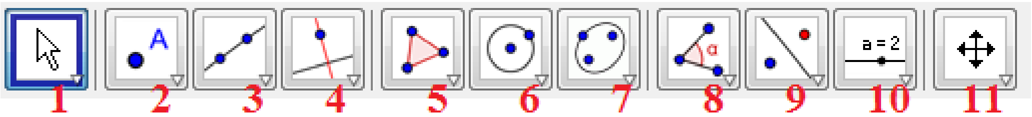


Figura 1.2 - Barra de Ferramentas Geogebra com botões numerados

ATIVIDADE 1: Marcando pontos no Geogebra

Para trabalhar com funções, especialmente, em nosso caso, de 1º e 2º grau, é necessário saber como marcar pontos pertencentes ou não ao gráfico de cada função, utilizando os comandos do software Geogebra. Para isso, abra uma nova janela do programa (Arquivo – Nova Janela) e siga as orientações fornecidas abaixo.

1ª Opção: ***Inserindo pontos diretamente na janela gráfica.***

a) Clique no **botão 2** e selecione **"Novo ponto"**. Clique, na janela gráfica, no local do ponto que deseja inserir. Observe que na janela algébrica aparece na aba de **Objetos Livres** o ponto **A** e suas coordenadas.

b) Repita o procedimento anterior e marque um ponto **B** qualquer, observe suas coordenadas.

2ª Opção: ***Inserindo o ponto desejado na barra de entrada de comandos.***

a) Clique na barra de entrada de comando e digite **C = (2,4).** Esse ponto será marcado na janela gráfica e suas coordenadas aparecem na janela algébrica.

b) Repita o procedimento anterior e marque outros dois pontos **D** e **E**.

ATIVIDADE 2: Traçando retas no Geogebra

1ª Opção: Diretamente na janela gráfica.

<u>*Se os pontos A e B já estiverem marcados na área gráfica:*</u>

a) Clicar no **botão 3,** escolher a opção "Reta definida por dois pontos", e clicar sobre os pontos **A** e **B**. A reta aparece na janela gráfica e na janela algébrica aparece, indicada por uma letra minúscula, a equação cartesiana da reta definida.

b) Faça o mesmo e trace a reta definida pelos pontos **C** e **D**. Observe a sua equação.

<u>*Se os pontos não estiverem definidos:*</u>

a) Clicar no **botão 3** e na sequência, clicar nos dois pontos que farão parte de sua reta. Os pontos **F** e **G** ficarão definidos automaticamente.

2ª Opção: Inserindo a reta através da entrada de comandos.

a) Clique na barra de entrada de comandos e comece a digitar a palavras “reta”. A opção **reta[]** aparecerá.

b) Dentro do colchete, digite os dois pontos pelos quais deseja que a reta passe, com letras maiúsculas e separadas por vírgula. Ex: **reta[D,F]**.

c) Faça o mesmo e determine a reta que passa por **C** e **E**.

<u>Agora, com base nas atividades que você fez, pense e responda:</u>

Cada uma das retas que você traçou ficou determinada exatamente por dois pontos. **Qual a justificativa matemática para esse fato? Explique com suas palavras.**

____

____

____

ATIVIDADE 3: Funções e gráficos no Geogebra

Para inserir funções no Geogebra, você deverá usar a barra de entrada de comandos, digitando a lei de formação da função desejada. As atividades seguintes exploram as diferentes formas de inserir comandos adequados no software a fim de traçar os respectivos gráficos de funções de 1º e 2º grau, inclusive para interpretar resultados importantes sobre o comportamento de cada uma dessas funções.

Para ilustrar esses procedimentos, apresentaremos uma sequência de orientações a fim de construir os gráficos de funções, como, por exemplo:

A) Função do primeiro grau: $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$***, com*** $\boldsymbol{a, b \in \mathbb{R}}$ ***e*** $\boldsymbol{a \neq 0}$**.**

B) Função do segundo grau: : $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$***, com*** $\boldsymbol{a, b, c \in \mathbb{R}}$ ***e*** $\boldsymbol{a \neq 0}$**.**

ATIVIDADE 3 (A1) : Gerando gráficos de funções de 1º grau

Em uma nova janela (**Arquivo, Nova Janela**) do Geogebra:

a) Insira a função $f(x) = 3x + 2$ utilizando a sintaxe **f(x)=3*x+2**.

b) Clique com o botão direito do mouse sobre o gráfico da função, selecione **Propriedades** e explore (cor, estilo, espessura da linha, etc.).

c) Observe que a lei de formação da função aparece na janela algébrica.

Você pode também inserir em uma nova janela do Geogebra, parâmetros para os coeficientes **a** e **b**, e verificar o que acontece com a função $f(x) = ax + b$ na medida em que os valores de **a** e **b** são alterados.

a) Clique no **botão 10** selecione a opção **Seletor**.

b) Clique na janela gráfica e preencha os campos conforme a figura abaixo, para inserir o parâmetro **a**:

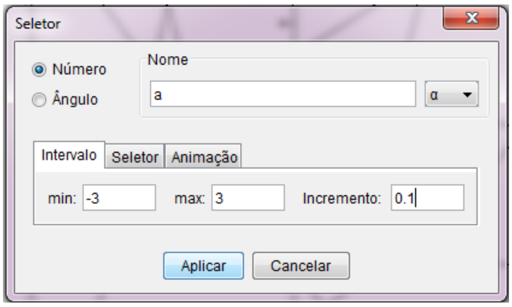


Figura 1.3 - Janela da opção Inserir Seletor

c) Faça o mesmo e insira o parâmetro b.

d) Na barra de comandos digite: **f(x)=a*x+b**.

e) Clique no **botão 1 – mover** e modifique os parâmetros **a** e **b**, clicando sobre eles.

f) Verifique as alterações que são provocadas por modificações em cada um desses parâmetros.

g) Complete a tabela abaixo, analisando o gráfico de $f(x) = ax + b$, conforme os parâmetros **a** e **b** indicados.

A	B	Lei da Função	Intersecção com o eixo OX	Intersecção com o eixo OY	Função Crescente, Decrescente ou Constante?
- 2	0				
2	0				
0	3				
- 2	- 1				
4	- 2				

Tabela 1.1: Análise do gráfico de funções do tipo f(x) = ax + b com base na modificação de parâmetros a e b.

Agora, responda:

1) Mantenha o parâmetro **b** fixo e movimente somente o parâmetro **a**. O que acontece com o gráfico da função?

____

____

2) Mantenha o parâmetro **a** fixo e movimente somente o parâmetro **b**. O que acontece com o gráfico da função?

____

____

3) Para que valor do parâmetro **a**, temos uma função constante?

____

____

4) No que você se baseou para completar a última coluna da tabela que você preencheu acima? Explique.

____

____

5) Você pode concluir se uma função é crescente ou decrescente, olhando para o valor de uma dos parâmetros que inseriu. Qual deles?

____

6) Com base no que você já estudou sobre Função de 1º grau e no que pode observar nesta atividade com o Geogebra, **explique**: como identificar se uma função do 1º grau é constante, crescente ou decrescente?

____

____

____

____

ATIVIDADE 3 (A2) Variações no parâmetro a da função de 1º grau $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ e o coeficiente angular da reta

Vamos falar agora em ***acréscimos*** e ***decréscimos*** nas variáveis da função $f(x) = ax + b$ e analisar, através de exemplos, qual é a relação dos mesmos com os parâmetros que trabalhamos na atividade anterior.

Exemplo 1: $f(x) = 2x - 1$.

a) Insira a função diretamente na barra de comandos: **f(x)=2x-1**.

b) Modifique a cor do gráfico (**azul**) e selecione a **espessura 5**.

c) Precisamos das equações dos eixos cartesianos, assim insira separadamente na barra de comandos as expressões: **x=0** e **y=0**.

d) Marque dois pontos **A** e **B** sobre o gráfico da f(x), de modo que a abscissa do ponto B seja maior do que a abscissa do ponto A. Destaque esses pontos com a cor vermelha.

e) Clique no **botão 4** e selecione **Reta perpendicular**. Clique no **ponto B** e no **eixo OX**.

f) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada com o **eixo OX**. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{X_B}$.

g) Clique no **ponto A** e no **eixo OX**, você criará outra reta.

h) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada na letra "f" com o **eixo OX**. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{X_A}$.

i) Clique no **ponto B** e no **eixo OY**, você criará outra reta.

j) Marque **o ponto de intersecção** da reta criada na letra "h" com o **eixo OY**. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{Y_B}$.

k) Clique no **ponto A** e no **eixo OY**, você criará outra reta.

l) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada na letra "j" com o **eixo OY**. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{Y_A}$.

m) Marque o **ponto C**, que é a intersecção das retas que passam por B e X_B e por A e X_A.

n) Marque os segmentos $\mathbf{AX_A}$, $\mathbf{BX_B}$, $\mathbf{AY_A}$, $\mathbf{BY_B}$. Para isso, selecione no **botão 3** a opção **"Segmento definido por dois pontos"**. Escolha uma cor e mude a espessura de cada segmento para 3.

o) Esconder as retas suportes de cada segmento, clicando sobre as mesmas e escolhendo a opção **“Exibir/Esconder objeto”.**

p) Localize os pontos **A** e **B**, conforme indicados abaixo e preencha a tabela com as informações solicitadas.

PONTO A	PONTO B	Variação sobre o Eixo OX: $X_B - X_A$	Variação sobre o Eixo OY: $Y_B - Y_A$	Calcule o coeficiente angular *m* da reta, definido por: $a = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$
(1 , 1)	(4 , 7)			
(2 , __)	(__, 5)			
(__ , 7)	(2, __)			
(__ , __)	(__, __)			

Tabela 1.2 - Cálculo do Coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e B de f(x) = 2x – 1.

Agora, responda:

1) O que aconteceu com o resultado da inclinação **a** (coeficiente angular da reta), em todos os casos calculados?

____

____

2) O sinal do coeficiente angular calculado desta função é positivo ou negativo?

____

3) A função $f(x) = 2x - 1$ é crescente ou decrescente?

____

4) O coeficiente angular da reta que é o gráfico da função $f(x) = 2x - 1$ é $\boldsymbol{m}$ = _____, que é igual ao parâmetro ______ da função.

Exemplo 2: Agora, considere a função $f(x) = -1x + 2$.

Para analisar as variações nessa nova função, você não precisa seguir todos os passos descritos no exemplo anterior, basta clicar sobre a função anterior na janela algébrica e alterar a lei da função digitando f(x)=-1x+2. Observação: talvez seja necessário ajustar o zoom, clicando com o botão direito do mouse, para melhor visualização.

a) Localize os pontos A e B, conforme for conveniente e preencha a tabela abaixo.

PONTO A	**PONTO B**	**Variação sobre o Eixo OX: $X_B - X_A$**	**Variação sobre o Eixo OY: $Y_B - Y_A$**	**Calcule o coeficiente angular m da reta, definido por: $a = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$.**
(1 , 1)	**(4 , -2)**			
(2 , __)	**(__, 5)**			
(__ , 7)	**(2, __)**			
(__ , __)	**(__, __)**			

Tabela 1.3 - Cálculo do Coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e B de $f(x) = -1x + 2$.

Agora, responda:

b) O que aconteceu com o resultado da inclinação **a** (coeficiente angular da reta), em todos os casos calculados?

____

____

c) O sinal do coeficiente angular calculado desta função é positivo ou negativo?

____

d) A função $f(x) = -1x + 2$ é crescente ou decrescente?

____

e) O coeficiente angular da reta que é o gráfico da função $f(x) = -1x + 2$ é m = ____, que é igual ao parâmetro _____ da função.

CONCLUSÕES (Completar com POSITIVO ou NEGATIVO)

O coeficiente angular de uma reta crescente é sempre _________________________.

O coeficiente angular de uma reta decrescente é sempre ________________________.

Podemos saber se uma função do 1º grau é crescente ou decrescente analisando o parâmetro "**a**" da função, uma vez que ele equivale ao coeficiente angular da reta.

ATIVIDADE 3 (B1) Gerando gráficos de funções de 2º grau

Em uma nova janela (**Arquivo, Nova Janela**) do Geogebra:

a) Insira a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ utilizando a sintaxe **f(x)=x^2+2*x+1**.

b) Clique com o botão direito do mouse sobre o gráfico da função, selecione **Propriedades** e explore (cor, estilo, espessura da linha, etc.).

c) Observe que a lei de formação da função aparece na janela algébrica.

Você pode também inserir em uma nova janela do Geogebra, parâmetros para os coeficientes **a, b** e **c**, e verificar o que acontece com a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na medida em que os valores de **a** , **b** e **c** são alterados.

a) Clique no **botão 10** selecione a opção **Seletor**.

b) Clique na janela gráfica e preencha os campos para inserir os parâmetros **a**, **b** e **c**, respectivamente.

c) Na barra de comandos digite: **f(x)=a*(x^2)+b*x + c**.

d) Clique no **botão 1 – Mover** e modifique os parâmetros **a**, **b** e **c**. Verifique as alterações que são provocadas por modificações em cada um desses parâmetros.

e) Complete a tabela abaixo para realizar uma análise do gráfico da função de 2ºgrau definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, conforme os parâmetros **a**, **b** e **c** indicados.

a	b	c	Lei da Função	Intersecção com o eixo OX	Intersecção com o eixo OY	Função Côncava para baixo ou para cima.
- 2	0	+1				
2	0	-1				
- 2	-1	2				
4	- 2	0				

Tabela 1.4 - Análise do gráfico de funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com base na modificação de parâmetros a, b e c.

Agora, responda:

1) Mantenha os parâmetros **b** e **c** fixos e movimente somente o parâmetro **a**. O que acontece com o gráfico da função?

2) Mantenha os parâmetros **a** e **c** fixos e movimente somente o parâmetro **b**. O que acontece com o gráfico da função?

3) Mantenha os parâmetros **a** e **b** fixos e movimente somente o parâmetro **c**. O que acontece com o gráfico da função?

4) No que você se baseou para completar a última coluna da tabela que você preencheu acima? Explique.

5) Você pode concluir se uma função é côncava para cima ou para baixo, olhando para o valor de um dos parâmetros que inseriu. Qual deles?

6) Com base no que você já estudou e no que viu no Geogebra **<u>explique</u>**: como identificar se uma função do 2º grau é côncava para cima ou para baixo?

CONCLUSÕES (Completar com POSITIVO ou NEGATIVO):

Se o **sinal** do parâmetro **a** da lei da função do 2º grau for _______________ o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para cima.

Se o **sinal** do parâmetro **a** da lei da função do 2º grau for _______________ o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Anexo B – Roteiro De Atividades – Parte 2

Com as atividades propostas nesta etapa, o aluno será capaz de:

- Visualizar e interpretar geometricamente o domínio e a imagem de uma função de 2ºgrau;
- Analisar o que acontece com a imagem de uma função quadrática nas proximidades de um ponto dado.
- Analisar o que acontece com a imagem de uma função quadrática quando os valores de *x* crescem ou decrescem ilimitadamente.
- Analisar, intuitivamente, o limite de uma sequência e o limite da soma dos termos de uma sequência de números reais, identificando quando a sequência converge ou diverge.

Explorando a função quadrática

Das atividades realizadas anteriormente, você já construiu com o Geogebra o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, e visualizou as alterações provocadas no gráfico da função com base na variação dos parâmetros **a, b** e **c.**

Você também concluiu que o gráfico será côncavo para cima quando o parâmetro **a** for positivo e será côncavo para baixo quando o parâmetro **a** for negativo.

Agora, continuaremos nossa análise, a fim de construirmos um conceito importante para várias áreas da matemática: a ideia intuitiva de limite de uma função, especialmente aplicado à função quadrática, e limite de sequências.

Revisando domínio e Imagem da função de 2ºgrau

ATIVIDADE 4: Vamos construir, em uma janela do Geogebra, o gráfico da função $f(x) = x^2$ e analisar o seu domínio e sua imagem!

A atividade fará referência aos comandos da barra de ferramentas que você já conhece, de acordo com a figura abaixo, a mesma utilizada no roteiro anterior de atividades:

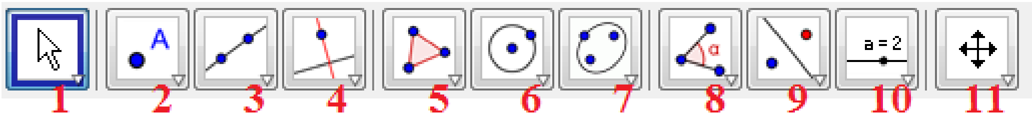


Figura 2.1- Relembrando a barra de Ferramentas do Geogebra com botões numerados

a) Abra uma janela do Geogebra e digite na linha de comandos **f(x)=x^2.**

b) Modifique a cor do gráfico (**azul**) e selecione a **espessura 5**.

c) Precisamos das equações dos eixos cartesianos, assim insira separadamente na barra de comandos as expressões: **x=0** e **y=0**.

d) Marque um ponto **X** sobre o eixo OX, inserindo um novo ponto com **o botão 2**.

e) Clique no **botão 4** e selecione **Reta perpendicular**. Clique no **ponto X** e no eixo OX.

f) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada com **o gráfico da função** $\boldsymbol{f(x)=x^2}$. Renomeie o ponto como **P**.

g) Selecione **Reta perpendicular** novamente, clique **no ponto P** e no **eixo OY** você criará outra reta.

h) Marque o ponto de intersecção da reta criada na letra "g" com o **eixo OY**. Renomeie o ponto como **Y**.

i) Marque os segmentos **PX** e **PY**. Para isso, selecione no **botão 3** a opção **"Segmento definido por dois pontos"**. Mude a espessura de cada segmento para 3, escolha como estilo de linha um pontilhado.

j) Esconda as retas suportes de cada segmento, clicando sobre as mesmas e escolhendo a opção **"Exibir/Esconder objeto".**

k) Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **X** e na opção **Habilitar rastro**. Troque para vermelho a cor do ponto (e do rastro!).

l) Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **Y** e na opção **Habilitar rastro**. Troque para verde a cor do ponto.

m) Clique no **botão 1** e movimente o ponto X ao longo do eixo OX, observe o que acontece com as marcações sobre os eixos OX e OU, em relação ao ponto P.

n) Utilize a opção **Zoom +** e **Zoom –** no **botão 11**, para ampliar ou reduzir a sua janela de visualização.

RESPONDA:

1) Ao movimentar o ponto X, o que significa o rastro em vermelho que você visualiza no eixo OX?

____

____

2) Descreva com palavras, qual é a sua compreensão sobre o conjunto de pontos formado no eixo OX pelo traço em vermelho.

____

____

____

3) Ao movimentar o ponto Y, o que significa o rastro em verde que você visualiza no eixo OY?

____

____

4) Descreva com palavras, qual é a sua compreensão sobre o conjunto de pontos formado no eixo OY pelo traço em verde.

____

____

____

5) Desabilite e habilite novamente o rastro sobre os pontos X e Y. Varie o ponto X somente no intervalo [0 , 3]. O rastro em verde fica restrito a que intervalo?

____

6) Faça o mesmo do item anterior e identifique a imagem da função para o intervalo [-3,0], movimentando o ponto X nesse intervalo.

____

7) O que você pode concluir sobre as imagens determinadas nos itens 3 e 4? Justifique.

____

____

<u>**CONCLUSÃO DA ATIVIDADE**</u> - De acordo com IEZZI (2004,p.89):

Domínio de uma função f: É o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f.

Imagem de uma função f: É o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f.

Analisando o comportamento de uma função "perto" de um ponto

ATIVIDADE 5(A): Vamos utilizar o gráfico do exemplo anterior e analisar o comportamento da função $f(x) = x^2$ na medida em que os valores de x (pertencentes ao domínio da função) se aproximam cada vez mais de 2, tanto pela esquerda quanto pela direita.

Utilize a linha de comandos do Geogebra e determine o valor da função $f(x)$ para os valores de x das tabelas abaixo, marcando os respectivos pontos sobre o gráfico da função.

Obs: Para marcar cada ponto digite, por exemplo, C=(2.8, f(2.8)) e observe na janela gráfica o ponto C=(2.8,7.84). Se necessário, aumente a quantidade de casas decimais utilizando o comando "Opções".

Tabela 2.1 - Analisando o limite da função $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 3$ pela direita

PONTO	A	B	C	D	E	F	G
x	**2**	**2.5**	**2.8**	**2.9**	**2.99**	**2.999**	**2.9999**
$f(x)$			7.84				

Tabela 2.2 - Analisando o limite da função $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 3$ pela esquerda

PONTO	H	I	J	K	L	M	N
x	**4**	**3.5**	**3.2**	**3.1**	**3.01**	**3.001**	**3.0001**
$f(x)$							

Agora, observando as tabelas, complete:

a) Os valores atribuídos para a variável x na tabela 2.1 se aproximam cada vez mais do número: _______ .

b) Na tabela 2.1, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais do número: ______ .

Assim, quanto mais próximo x está de ______, à esquerda dele, mais próxima $f(x) = x^2$ está de ______.

c) Os valores atribuídos para a variável x na tabela 2.2 se aproximam cada vez mais do número: ________ .

d) Na tabela 2.2, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais do número:_______ .

Assim, quanto mais próximo x está de _______, à direita dele, mais próxima $f(x) = x^2$ está de _______.

CONCLUSÃO:

Como o comportamento da função $f(x)$ é o mesmo para x próximo de 3, seja para valores menores do que 3 ou maiores do que 3, dizemos simplesmente que:

O **LIMITE** da $f(x)$ para x **tendendo a 3** (ou seja, para x cada vez mais próximo de 3) **é igual a 9**.

Escrevemos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

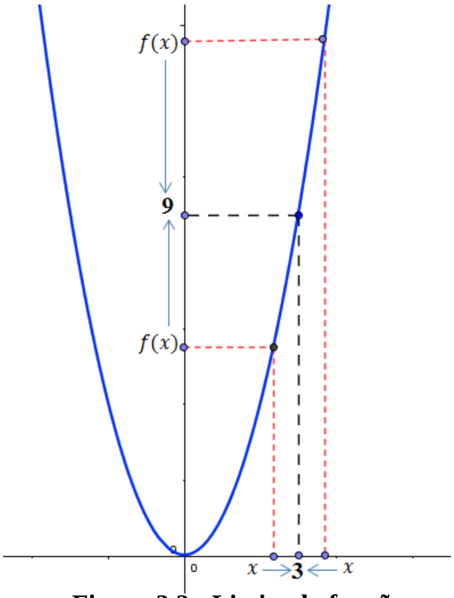


Figura 2.2 - Limite da função $f(x) = x^2$ para x tendendo a 3

ATIVIDADE 5(B): Com a atividade anterior você pode perceber que o uso básico de **LIMITES** é descrever como uma função *se comporta* na medida em que sua variável independente se aproxima cada vez mais de um determinado valor!

Siga os passos da atividade anterior e **determine o Limite da função $f(x) = x^2 - x + 1$ para x tendendo a 2.**

OBS: Escolha valores cada vez mais próximos de $x = 2$ pela direita e pela esquerda e complete as tabelas abaixo. Depois, observando os valores da tabela, complete as afirmações abaixo e esboce o gráfico da função representando o limite encontrado (conforme a figura anterior).

Tabela 2.3 - Valores de x aproximando-se de 2 pela esquerda

PONTO	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
$\boldsymbol{x}$							
$\boldsymbol{f(x)}$							

Quanto mais próximo x está de 2, à esquerda dele, mais próxima $f(x) = x^2 - x + 1$ está de ______.

Tabela 2.4 - Analisando o comportamento de $f(x)$ para valores de x aproximando-se de 2 pela direita.

PONTO	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
$\boldsymbol{x}$							
$\boldsymbol{f(x)}$							

Quanto mais próximo x está de 2, à direita dele, mais próxima $f(x) = x^2 - x + 1$ está de ____.

Podemos escrever, portanto que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \_\_\_\_\_$$

GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = x^2 - x + 1$.

(Destaque para o limite de $f(x)$ para x tendendo a 2 pela direita e pela esquerda.)

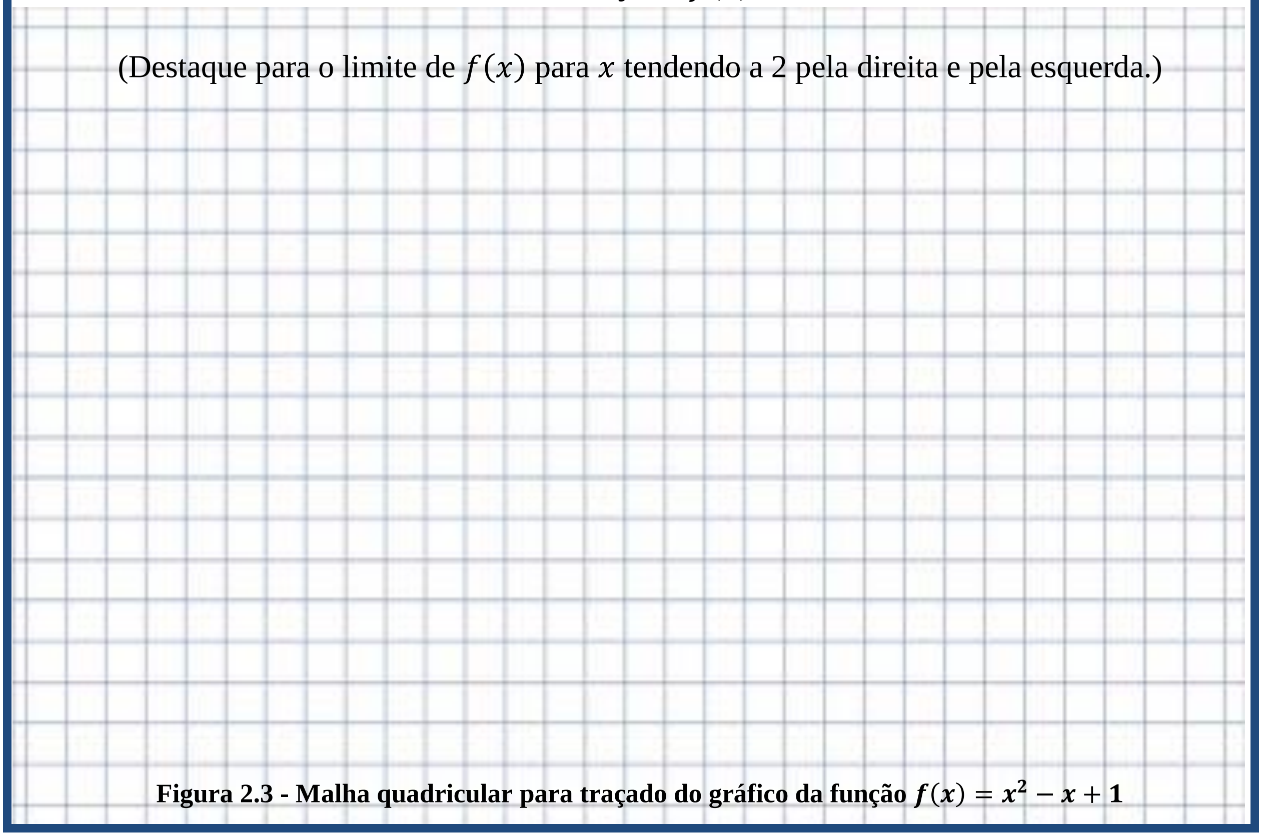


Figura 2.3 - Malha quadricular para traçado do gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 1$

Analisando o comportamento de uma função quadrática na medida em que os valores de x crescem ou decrescem ilimitadamente!

Nas próximas atividades, vamos analisar o que acontece com os valores da imagem de uma função quadrática, na medida em que os valores da variável x crescem ou decrescem cada vez mais. Nosso objetivo é determinar se existe um valor limite, nas condições citadas, para a imagem de uma função quadrática, sejam elas côncavas para cima ou para baixo.

Função quadrática côncava para cima

ATIVIDADE 6(A): Com base na função $f(x) = x^2$ da atividade anterior, preencha a tabela abaixo e visualize o comportamento da função na medida em que ***os valores de x se tornam cada vez maiores e positivos.***

Tabela 2.5 - Analisando o comportamento de $f(x)$ para valores de x crescendo ilimitadamente.

x	1	5	10	20	50	100	1000
$f(x) = x^2$							

Responda: O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de x crescem cada vez mais?

____

____

____

Portanto, podemos escrever que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \_\_\_\_\_$$

ATIVIDADE 6(B): Ainda, com base na função $f(x) = x^2$, preencha a tabela abaixo e visualize o comportamento da função, agora na medida em que os valores de x se tornam cada vez menores (negativos).

Tabela 2.6 - Analisando o comportamento de $f(x)$ para valores de x decrescendo ilimitadamente.

x	-1	-5	-10	-20	-50	-100	-1000
$f(x) = x^2$							

Responda: O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de x decrescem cada vez mais?

____

____

Podemos escrever que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \_\_\_\_\_$$

<u>CONCLUSÃO:</u>

- "À medida que $\boldsymbol{x}$ **cresce através de valores positivos**, ***os valores da função também crescem*** e ***<u>ilimitadamente</u>***. Em outras palavras dizemos que *<u>podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos</u>*, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando para x valores suficientemente grandes." (IEZZI, 2005, p.72)

- "À medida que $\boldsymbol{x}$ **decresce através de valores negativos**, ***os valores da função crescem*** e ***<u>ilimitadamente</u>***. Em outras palavras dizemos que *<u>podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos</u>*, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando para x valores negativos cujos módulos sejam suficientemente grandes." (IEZZI, 2005, p.72)

Função quadrática côncava para baixo

ATIVIDADE 7(A): Com base na função $f(x) = -x^2$, preencha a tabela abaixo e visualize o comportamento da função a medida em que os valores de x se tornam cada vez maiores e positivos.

Tabela 2.7 - Analisando o comportamento de $f(x) = -x^2$ para valores de x crescendo ilimitadamente.

$\boldsymbol{x}$	**1**	**5**	**10**	**20**	**50**	**100**	**1000**
$\boldsymbol{f(x) = -x^2}$							

<u>Responda:</u> O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de x crescem cada vez mais?

____

____

Escrevemos:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \_\_\_\_\_$$

ATIVIDADE 7(B): Ainda, com base na função $f(x) = -x^2$, preencha a tabela abaixo e visualize o comportamento da função, agora na medida em que os valores de x se tornam cada vez menores (negativos).

Tabela 2.8 - Analisando o comportamento de $f(x) = -x^2$ para valores de x decrescendo ilimitadamente.

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**-5**	**-10**	**-20**	**-50**	**-100**	**-1000**
$\boldsymbol{f(x) = -x^2}$							

<u>Responda:</u> O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de x decrescem cada vez mais?

____

____

Escrevemos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \_\_\_\_\_$$

<u>CONCLUSÃO:</u>

(Reescreva a conclusão da Atividade 6, adaptando-a a função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$ de acordo com a análise das tabelas acima.)

- ____

____

____

- ____

____

____

ATIVIDADE 8: Alguns exercícios para explorar o conceito de limite!

Faça o gráfico das funções indicadas em cada caso no Geogebra e encontre os valores dos limites indicados para cada função.

Exercício 1) Para a função $f(x) = x^2 - 9$. Determine:

a) $\lim_{x\to 3} f(x) =$ **b)** $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ **c)** $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

Com base na análise do gráfico da função explique o que você entende por:

$$\lim_{x\to 3} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

____

____

Exercício 2) Para a função $f(x) = (-x^2 - 2x + 3)$. Determine:

a) $\lim_{x\to -1} f(x) =$ **b)** $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ **c)** $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

Com base na análise do gráfico da função explique o que você entende por:

$$\lim_{x\to -\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

____

____

Exercício 3) Para a função $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Determine:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) =$ **b)** $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ **c)** $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

Com base na análise do gráfico da função explique o que você entende por:

$$\lim_{x\to +\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

____

____

Sequência e Limite de Sequência: um exemplo!

O objetivo das próximas atividades é estender o conceito de limite para sequências. O que se pretende é, através das noções de limites, verificar se uma sequência numérica converge ou diverge. Além disso, na continuação desse trabalho estão sendo propostas atividades cuja conclusão refere-se à análise da soma dos termos de uma sequência.

ATIVIDADE 9(A): Construindo o conceito de sequência!

Considere um quadrado de **lado igual a 1** unidade de medida e **área igual a 1 x 1= 1** unidade de área.

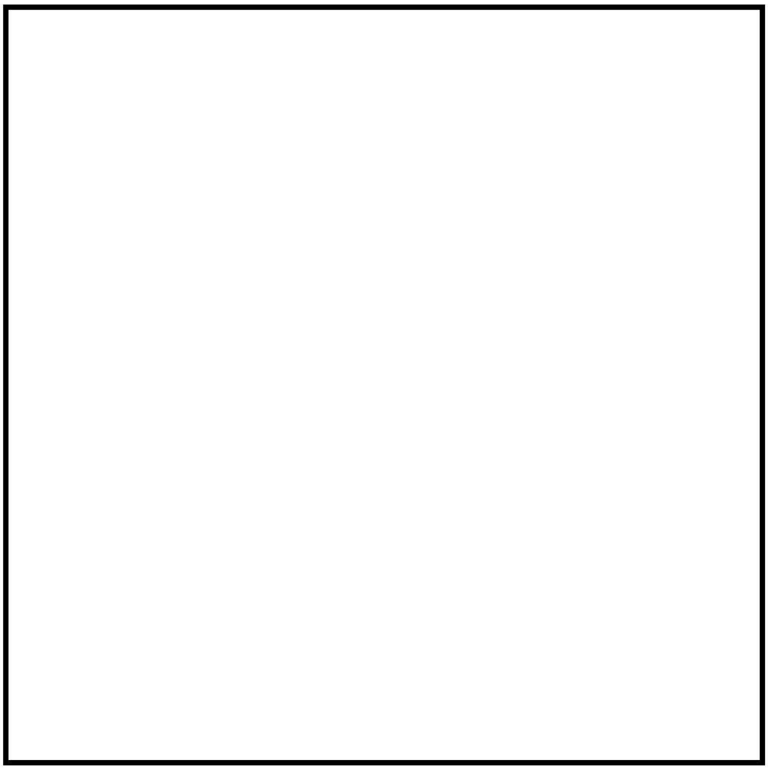


Figura 2.3 - Quadrado para a realização da Atividade 9

<u>SIGA AS SEGUINTES ORIENTAÇÕES</u>:

a) Divida o quadrado acima em dois retângulos iguais. Pinte um deles e nomeie-o como $\mathbf{a_1}$. **Determine a área** $\mathbf{a_1}$**.**

b) Divida a parte restante do quadrado, novamente em duas partes iguais, obtendo dois quadrados menores. Pinte um deles e nomeie-o como $\mathbf{a_2}$. **Determine a área** $\mathbf{a_2}$**.**

c) Divida a parte restante do quadrado, novamente em duas partes iguais (em dois retângulos). Pinte uma delas e nomeie-a como $\mathbf{a_3}$. **Determine a área** $\mathbf{a_3}$**.**

d) Divida a parte restante do quadrado, novamente em duas partes iguais (em dois quadrados). Pinte uma delas e nomeie-a como $\mathbf{a_4}$. **Determine a área** $\mathbf{a_4}$**.**

e) Divida a parte restante do quadrado, novamente em duas partes iguais. Pinte uma delas e nomeie-a como $\mathbf{a_5}$. **Determine a área** $\mathbf{a_5}$**.**

f) Divida a parte restante do quadrado, novamente em duas partes iguais. Pinte uma delas e nomeie-a como $\mathbf{a_6}$. **Determine a área** $\mathbf{a_6}$**.**

Complete a tabela de acordo com as áreas que você calculou em cada item anterior!

Tabela 2.8 - Analisando a convergência dos termos de uma sequência

REGIÃO	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
ÁREA	$\frac{1}{2}$					

Observe a sequência numérica formada pelas áreas $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$,$\mathbf{a_5}$, $\mathbf{a_6}$.

Essa sequência pode ser escrita com um termo geral, uma vez que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por $\frac{1}{2}$.

Com base nisso, reescreva os resultados da tabela acima como potências de base $\frac{1}{2}$.

Tabela 2.9 - Encontrando o processo de recorrência que gera a sequência considerada

REGIÃO	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
ÁREA	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$				

Note que a sequência gerada é igual a $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\frac{1}{256},....$

Essa sequência é formada por um processo de RECORRÊNCIA**: cada termo é igual ao anterior multiplicado por uma constante, neste caso, por $\frac{1}{2}$.**

Na medida em que continuamos esse processo vamos obtendo novos termos! Desse modo para um número n de divisões do quadrado teríamos:

$$\boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}}$$

Dizemos que a fórmula acima é o termo geral da sequência. Assim, podemos representar a sequência de áreas obtidas, também, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{64},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)}$$

De uma maneira geral, de acordo com GUIDORIZZI (2001, p.111) temos que **uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $n \mapsto a_n$ cujo domínio é um subconjunto dos Números Naturais.**

A notação a_n (leia-se: *a* índice *n*) é usada para indicar o valor que a sequência assume no número natural *n*. Diremos que a_n é o termo geral da sequência.

ATIVIDADE 9(B): Determinando o limite da sequência!

Exemplo 1: Consideremos a sequência obtida no item anterior:

$$\boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}} \text{ , ou seja, } \boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{64},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right).}$$

a) Obtenha a representação decimal de cada termo dessa sequência acima, até *n* = 6. Utilize uma calculadora ou o Geogebra para isso!

Tabela 2.9 - Representação decimal dos termos da sequência considerada

REGIÃO	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	$\mathbf{a_5}$	$\mathbf{a_6}$
Valor decimal	**0,5**					

b) Agora, responda: a medida que os valores de *n* aumentam, os valores de a_n se aproximam de que valor numérico?

____

c) Podemos escrever então que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \_\_\_\_\_\_$$

Exemplo 2: Considere a sequência $\boldsymbol{a_n = 2^n}$.

a) Complete a tabela abaixo de acordo com os valores indicados para *n*.

Tabela 2.10 - Obtendo os termos da sequência de termo geral $a_n = 2^n$.

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	...	100
$a_n = 2^n$											...	

b) Agora, responda: o que acontece com os valores de a_n na medida em que os valores de *n* aumentam cada vez mais?

____

c) Podemos escrever então que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2^n) = \_\_\_\_\_\_$$

Exemplo 3: Agora, considere a sequência $\boldsymbol{a_n = -\,2^n}$**.**

a) Complete a tabela abaixo de acordo com os valores indicados para *n*. (Observe que basta considerar o oposto dos resultados do exemplo anterior!)

Tabela 2.11 - Obtendo os termos da sequência de termo geral $a_n = -2^n$.

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	...	100
$a_n = -2^n$											...	

b) Agora, responda: O que acontece com os valores de a_n na medida em que os valores de *n* aumentam cada vez mais?

____

c) Podemos escrever então que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-2^n) = \_\_\_\_\_\_$$

Exemplo 4: Pense e determine os limites abaixo:

(Se quiser você pode utilizar o Geogebra para identificar alguns pontos da sequência e identificar seu comportamento!)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\lim_{n\to\infty}(3+n^2) = \_\_\_\_\_\_\_$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-2n) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

CONCLUSÕES:

Tabela 25: Conclusões sobre a convergência/ divergência de uma sequência

SE:	**DIZEMOS QUE:**	**ESCREVEMOS:**
$\lim_{n\to\infty} a_n = A$	a_n **converge** para *A* (*A* é um número real)	$a_n \longmapsto A$
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$	a_n **diverge** para $+\infty$	$a_n \longmapsto +\infty$
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	a_n **diverge** para $-\infty$	$a_n \longmapsto -\infty$

ATIVIDADE 9(C) Determinando o limite da Soma dos termos de uma Sequência

Vamos voltar a considerar a sequência que extraímos das divisões do quadrado sucessivas vezes em duas partes iguais, ou seja, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$, ou ainda:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$

Com auxílio do Geogebra, calcule e complete a tabela abaixo:

Tabela 2.12 - Analisando a soma dos termos da sequência de termo geral $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

s_n = **Soma das regiões obtidas de** a_1 **até** a_n	**Valor obtido:**
$S_1 = a_1$	
$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$	
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$	
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$	
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_4 + a_5$	
...	...
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$	$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

a) Agora, responda: O que acontece com os valores de S_n na medida em que os valores de *n* aumentam cada vez mais?

____

b) Podemos escrever então que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \_\_\_\_\_\_$$

Neste caso, dizemos que **o limite da soma S_n da sequência de termo geral a_n** é _____.

Observe que, sua conclusão acima, deve coincidir com o valor da área do quadrado inicial, uma vez que juntando todas as infinitas áreas das regiões determinadas de a_1 até a_n, obtemos a área total do quadrado. VERIFIQUE ISSO!

Perceba que na medida que "*n*" cresce, S_1, S_2, S_3,... são aproximações cada vez melhores da soma $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

Anexo C – Roteiro de Atividades – Parte 3

Com as atividades propostas nesta etapa, o aluno será capaz de:

- Revisar o conceito de velocidade média em um intervalo de tempo e aproximar o cálculo da velocidade instantânea através da obtenção de intervalos cada vez menores;
- Compreender o significado de variação média num intervalo do domínio da função, através do cálculo do coeficiente angular da reta que passa pelos pontos da função referente aos extremos de cada intervalo considerado;
- Visualizar o significado de reta tangente ao gráfico de uma função quadrática;
- Relacionar o sinal do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função com a definição de função crescente ou decrescente em certo intervalo e identificar o ponto de máximo ou mínimo da função quadrática.
- Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado.

Trabalhando ideias relacionadas a taxas de variação!

Taxa de variação média e velocidade média

Pense na seguinte situação: *Um automóvel em viagem, percorre 180 Km em 3 horas. Assim, dividindo 180 km por 3h, conclui-se que o automóvel percorreu, em média, 60 km em 1 hora, isto é 60 Km/h.*

Isso não indica, por exemplo, que após uma hora de viagem tenham sido percorridos exatos 60 Km, uma vez que você pode, durante as três horas, ter feito alguma parada mas depois ter andado um pouco a mais e compensado esse tempo!

Essa ideia simples, que leva em conta apenas a **RAZÃO (taxa)** entre a **distância percorrida** pelo objeto e o **tempo gasto nesse deslocamento** é que chamamos de ***VELOCIDADE MÉDIA***!

$$Velocidade\ Média = \frac{variação\ da\ distância}{variação\ do\ tempo}$$

Ou seja, $\boldsymbol{V_{Méd} = \frac{\Delta d}{\Delta t}}$ **, ou ainda:** $\boldsymbol{V_{Méd} = \frac{d(t+\Delta t)-d(t)}{\Delta t}}$.

Observe que essa ideia é a mesma que trabalhamos no primeiro dia de nossas atividades: *a razão entre a **variação dos valores da variável y** em relação **à variação sofrida pela variável x** da função $f(x)$ num certo intervalo.*

ATIVIDADE 10(A): *Um objeto move-se ao longo de uma estrada reta, de acordo com a equação $f(x) = 3x - 2$, onde $f(x)$ mede a distância em metros e x o tempo em segundos*.

Faça uma análise desse movimento, com auxilio do Geogebra, no intervalo de 1 a 3 segundos.

Siga as orientações e responda ao que é pedido:

a) Digite na linha de comandos a lei da função: f(x)=3x-2 .

b) Marque os pontos: A= (1,f(1)) e B=(3,f(3)).

Assim, f(1) = ______ e f(3) = _______ .

c) Determine:

$$\boldsymbol{\Delta x} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \boldsymbol{\Delta y} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

d) Calcule a velocidade média ($V_{Méd}$) do objeto quando este se desloca do ponto $x = 1$ ao ponto $x = 3$ (use as relações anteriores e as informações que você determinou no item b).

$$\boldsymbol{V_{Méd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

Ou ainda: $$\boldsymbol{V_{Méd} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

e) Lembre-se do conceito de coeficiente angular de uma reta (trabalhado na primeira tarde de atividades!). **Qual é o coeficiente angular da reta que representa o movimento desse objeto? Você consegue perceber alguma relação entre o coeficiente angular e a velocidade média, calculada nesse caso?** Explique.

____

____

____

____

ATIVIDADE 10(B): Considere a equação do movimento de um objeto, dada por $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 1}$, onde $\boldsymbol{f(x)}$ ***mede a distância em metros*** e ***x o tempo em segundos.***

a) Determine a velocidade média ($V_{Méd}$) do objeto no intervalo de tempo que vai de 4 segundos a 7 segundos. Para isso, faça o gráfico no Geogebra, marque os pontos correspondentes e complete as tabelas abaixo!

Tabelas 3.1 e 3.2 - Cálculo da velocidade média da função $y(x) = x^2 - 1$ no intervalo [4,7]

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = y}$
$\boldsymbol{x_1 = 4}$	$y_1 =$ _____
$\boldsymbol{x_2 = 7}$	$y_2 =$ _____

$\boldsymbol{\Delta x = x_2 - x_1}$	$\boldsymbol{\Delta y = y_2 - y_1}$	$\boldsymbol{V_{Méd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

Taxa de variação instantânea e velocidade instantânea

Vamos considerar agora, *o problema de determinar a velocidade de um objeto em movimento, num determinado instante de tempo x*, o que significa determinar sua ***velocidade instantânea***.

Com as atividades propostas abaixo, você irá compreender o significado dessa afirmação!

ATIVIDADE 11 (Exemplo retirado do material de MA22) Imagine a situação em que um jogador de vôlei foi sacar, levantou a bola, mas se arrependeu e a bola caiu muito próxima do ponto onde foi lançada.

Imagine que esse movimento todo tenha levado um pouco mais de 2 segundos e que a partir de fotografias tiradas em intervalos regulares foi possível dizer a altura da bola a cada instante representado a seguir.

Tabela 3.3: Altura (m) da bola em cada instante (s)

Tempo em segundos $\boldsymbol{x}$	**0**	**0.5**	**1**	**1.1**	**1.2**	**1.5**	**2**
Altura em metros $\boldsymbol{f(x)}$	**2**	**6.25**	**8**	**8.05**	**8**	**7.25**	**4**

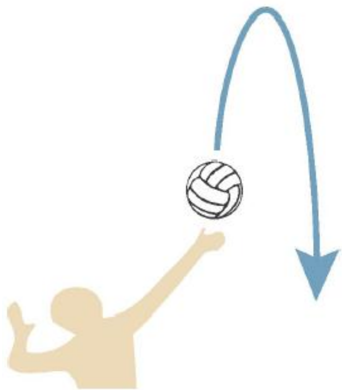


Figura 3.1- Material de Cálculo – Unidade 9 - MA 22 (2012, p.2)

A pergunta é: Qual foi a velocidade da bola no instante $\boldsymbol{x = 1}$?

Para responder a essa pergunta vamos calcular a velocidade média, ou seja, $\boldsymbol{V_{Méd}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, em vários intervalos, cada vez menores, a fim de aproximar a velocidade média, da velocidade instantânea da bola no tempo $x = 1$.

Preencha a tabela abaixo de acordo com os dados da Tabela 3.3.

Tabela 3.4 - Interpretação geométrica para o cálculo da velocidade instantânea

Intervalo de tempo $[x_1, x_2]$	**Intervalo de altura** $[y_1, y_2]$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta y = y_2 - y_1$	$V_{méd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
[1 , 2]				
[1, 1.5]				
[1, 1.2]				
[1, 1.1]				

Agora, responda:

a) Na medida em que os valores de variação de tempo Δx diminuem, para que valor se aproximam, cada vez mais, os valores da velocidade média $V_{méd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ da bola que foram calculados?

____

b) Intuitivamente, podemos dizer que: ***<u>Quanto menor o intervalo de tempo considerado, mais próxima a velocidade média fica da velocidade instantânea</u>***. Assim, responda intuitivamente:

Qual foi a aproximação obtida para a velocidade instantânea da bola no instante $x = 1$?

____

c) Lembrando-se do conceito de limite de sequências trabalhado anteriormente. Determine:

$$\lim_{\Delta x \to 0} V_{méd} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \_\_\_\_\_\_\_$$

A reta tangente ao gráfico de uma função

Nosso objetivo agora é entender o significado de reta tangente ao gráfico de uma função, no nosso caso, especificamente uma função de 2º grau!

Para isso, siga as orientações e realize as atividades propostas abaixo.

ATIVIDADE 12(A). Construindo o conceito de reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto de abcissa $x = 1$.

a) Abra uma tela do Geogebra e insira a função **f(x)=x^2** na barra de comandos.

b) Troque a cor do gráfico para vermelho e selecione *espessura 3* (use a opção propriedades, clicando com o botão direito do mouse sobre o gráfico);

c) Insira o ponto **P=(1, f(1))** sobre o gráfico da função digitando esse comando na barra de comandos.

d) Selecione a opção **Seletor** (Botão 10) e clique na janela gráfica. Crie o seletor "a" variando de **1.1 (min)** a **3 (max)** e clique em *aplicar*.

e) Insira o ponto **Q = (a, f(a)).**

f) Trace a reta que passa por **P** e **Q** inserindo o comando **reta[P,Q]** na barra de comandos.

g) Movimente o parâmetro **a** e verifique as alterações referentes a inclinação da reta traçada.

h) Insira separadamente na barra de comandos as expressões: **x=0** e **y=0**.

i) Clique no **botão 4** e selecione **Reta perpendicular**. Clique no **ponto P** e no **eixo OX**.

j) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada com o **eixo OX**. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{X_P}$.

k) Clique no **ponto Q** e no **eixo OX**, você criará outra reta.

l) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada no item anterior com o **eixo OX**. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{X_Q}$.

m)Clique no **ponto P** e no **eixo OY**, você criará outra reta.

n) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada no item anterior com o $\boldsymbol{eixo\ OY}$. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{Y_P}$.

o) Clique no **ponto Q** e no **eixo OY**, você criará outra reta.

p) Marque o **ponto de intersecção** da reta criada no item anterior com o **eixo OY**. Renomeie o ponto como $\boldsymbol{Y_Q}$.

q) Marque os segmentos $\mathbf{PX_P}$, $\mathbf{QX_Q}$, $\mathbf{PY_P}$, $\mathbf{QY_Q}$. Para isso, selecione no **botão 3** a opção **"Segmento definido por dois pontos"**. Escolha uma cor e mude a espessura de cada segmento para 3 e o estilo tracejado.

r) Esconder as retas suportes de cada segmento tracejado, clicando sobre as mesmas e escolhendo a opção **"Exibir/Esconder objeto".**

Movimente o parâmetro "a" conforme indicado em cada caso e complete a tabela:

Tabela 3.5 - Construindo o conceito de reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ em $x = 1$

PONTO P (x_1, y_1)	A	PONTO Q (x_2, y_2)	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta y = y_2 - y_1$	Coeficiente angular da reta: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
(1 , 1)	3				
(1 , 1)	2.5				
(1 , 1)	2				
(1 , 1)	1.5				
(1 , 1)	1.1				

Observe que: ***<u>na medida em que o parâmetro "a" se aproxima cada vez mais de 1, o ponto Q se aproxima cada vez mais do ponto P</u>***.

Assim, encontrar a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto **P = (1, 1)** , significa encontrar a reta $\boldsymbol{y = mx + n}$ que, a partir desse processo de aproximação, somente possui em comum com o gráfico da função o ponto **P**.

Vamos aproximar o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ no ponto P = (1, 1).

- Na medida em que o ponto **Q** se aproxima do ponto **P**, os valores do coeficiente angular "a" ***<u>se aproximam cada vez mais</u>*** de que valor?________________________________

- Use o valor de $\boldsymbol{m}$ que você indicou no item anterior e o ponto **P = (1 , 1)**, ou seja, os valores $\boldsymbol{x = 1}$ e $\boldsymbol{y = 1}$, substituindo na equação da reta tangente $\boldsymbol{y = mx + n}$ e calcule o valor de **n**.

- Complete a equação da reta tangente substituindo os valores que você obteve para m e n:

$$\boldsymbol{y = mx + n} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y =} \ \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Assim, para escrevermos a equação da reta tangente ao gráfico de uma função basta conhecer o coeficiente angular dessa reta e o seu ponto de tangencia, ou seja, o ponto comum entre a reta e o gráfico da função.

ATIVIDADE 12(B) Construa, em uma nova tela do Geogebra, o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 3}$ e siga as orientações abaixo:

a) Marque o ponto **P = (1, f(1))**.

b) Selecione no **botão 4** a opção **Tangentes**, clique no gráfico e no **ponto P**.

c) Marque um **ponto Q** sobre a reta tangente desenhada (você pode localizar um ponto de coordenadas exatas para facilitar seu cálculo!)

d) Complete a tabela abaixo de modo a determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função dada **no ponto P**.

Tabela 3.6 - Cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = 1$.

PONTO P $\boldsymbol{(x_1, y_1)}$	**PONTO Q** $\boldsymbol{(x_2, y_2)}$	$\boldsymbol{\Delta x = x_2 - x_1}$	$\boldsymbol{\Delta y = y_2 - y_1}$	**Coeficiente angular da reta:** $\boldsymbol{a = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

e) Usando as coordenadas do ponto de tangência $\boldsymbol{P}$, determine o valor de "**b**" para a equação da reta $\boldsymbol{y = ax + b}$.

f) Escreva a equação da reta tangente procurada: ______________________________

Inclinação da reta Tangente a uma curva: intervalos de crescimento ou decrescimento e ponto de máximo ou mínimo da função.

O **coeficiente angular da reta tangente**, e, portanto, **sua inclinação**, nos fornece informações importantes acerca do **comportamento de uma função**.

Através das atividades abaixo você perceberá que é possível identificar **os intervalos onde a função**, no nosso caso quadrática, **cresce ou decresce**, bem como **seu ponto de máximo ou mínimo**.

Conhecer e interpretar essas informações é fundamental, principalmente, quando utilizamos a função quadrática para modelar problemas reais, como velocidade de um movimento uniformemente variado (na física), por exemplo.

ATIVIDADE 13 (A): Explorando a reta Tangente no Geogebra e analisando variações no gráfico da função quadrática

a) Abra uma tela do Geogebra e insira a função **f(x)=x^2** na barra de comandos.

b) Troque a cor do gráfico para *vermelho* e selecione *espessura 3* (use a opção propriedades, clicando com o botão direito do mouse sobre o gráfico);

c) Selecione a opção **Seletor (Botão 10)** e clique na janela gráfica. Crie o seletor **"a"** variando de -5 (min) a 5 (max) e clique em aplicar.

d) Insira o ponto **P** no gráfico colocando na barra de comandos a sintaxe **P=(a,f(a))** e tecle *enter*.

e) Selecione a opção **Tangentes (Botão 4)** clique no gráfico da função e no ponto **P**. *Você obterá a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto*. Troque a *cor* da reta tangente e a *espessura para 3*.

f) Selecione a opção **inclinação (no Botão 8)** e clique na reta tangente, assim você irá visualizar as respectivas variações Δx e Δy na janela gráfica, bem como o valor **m** do coeficiente angular **(inclinação)** da reta tangente ao gráfico da função no ponto **P**.

g) Movimente o parâmetro a (usando a opção **mover, Botão 1**) e observe a variação da inclinação da reta tangente.

h) Localize o parâmetro **"a"** indicado em cada caso e preencha a tabela com as informações corretas, todas as informações podem ser verificadas diretamente no Geogebra.

Tabela 3.7 - Explorando a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$

a	**Coordenadas do ponto P = (x,y)**	**Inclinação da reta tangente: m**	**A reta tangente é crescente ou decrescente?**	**Equação da reta tangente ao gráfico no ponto P**
- 3				
- 2				
- 1				
0				
1				
2				
3				

i) ***Perceba que existe uma relação entre o parâmetro a (a abcissa x de cada ponto P determinado acima*) *e o coeficiente angular (a inclinação da reta tangente) m.*** Que relação é essa? Explique com suas palavras.

____

____

____

j) Complete os espaços abaixo com os termos **POSITIVO**, **NEGATIVO** ou **ZERO** conforme o que você pode visualizar no Geogebra.

- O coeficiente angular (a) da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ é ________________________ no intervalo $(-\infty, 0)$ do domínio da função.
- O coeficiente angular (a) da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ é ________________________ no intervalo $(0, +\infty)$ do domínio da função.
- O coeficiente angular (a) da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ é ________________________ no ponto P(0,0).

k) Complete os espaços abaixo com os termos **CRESCENTE** ou **DECRESCENTE**, conforme o que você pode visualizar no Geogebra.

- **A função $f(x) = x^2$ é ______________________________ no intervalo $(-\infty, 0)$.**
- **A função $f(x) = x^2$ é ______________________________ no intervalo $(0\ , +\infty)$.**

l) A função $f(x) = x^2$ admite ponto de máximo ou mínimo? Que ponto é esse?

____

CONCLUSÕES (Completar com os termos POSITIVO, NEGATIVO ou NULO)

A inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função fornece informações importantes acerca do crescimento ou decrescimento da função.

- Quando o coeficiente angular da reta tangente (m) for ____________________ em um intervalo de variação do domínio da função, a função será ***CRESCENTE nesse intervalo***.
- Quando o coeficiente angular da reta tangente (m) for ______________________ em um intervalo de variação do domínio da função, a função será **DECRESCENTE nesse intervalo**.
- Quando o coeficiente angular da reta tangente (m) for _______________ em um ponto P (no caso da função quadrática!), esse ponto é o **ponto de máximo** ou **ponto de mínimo** da função dada.
- $P = (x, y)$ será **ponto de máximo** da função $f(x)$**,** se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico passar de _______________________ para _________________________, ou seja, se **a função $f(x)$ é crescente para valores do domínio menores que** x e **decrescente para valores maiores de x.**
- Caso contrário, $P = (x, y)$ será **ponto de mínimo**, ou seja, **a função é decrescente até o ponto P e cresce a partir dele**.

ATIVIDADE 13 (B) . Repita os passos anteriores para construir a reta tangente a o gráfico da função $f(x) = -x^2$ e responder aos itens abaixo:

a) Localize o parâmetro **"a"** indicado em cada caso e preencha a tabela com as informações corretas, todas as informações podem ser verificadas diretamente no Geogebra.

Tabela 3.8 - Explorando a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = -x^2$

a	Coordenadas do ponto P = (x,y)	Inclinação da reta tangente:	A reta tangente é crescente ou decrescente?	Equação da reta tangente ao gráfico no ponto P
- 2				
- 1				
0				
1				
2				

b) Complete os espaços abaixo com os termos **POSITIVO**, **NEGATIVO** ou **ZERO** conforme o que você pode visualizar no Geogebra.

- O coeficiente angular $(\boldsymbol{a})$ da reta tangente ao gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$ é ______________________ no **intervalo** $(-\infty, \mathbf{0})$ do domínio da função.
- O coeficiente angular $(\boldsymbol{a})$ da reta tangente ao gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$ é ______________________ no **intervalo** $(\mathbf{0}, +\infty)$ do domínio da função.
- O coeficiente angular $(\boldsymbol{a})$ da reta tangente ao gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$ é ______________________ no **ponto** $\boldsymbol{P(0, 0)}$.

c) Complete os espaços abaixo com os termos **CRESCENTE** ou **DECRESCENTE**, conforme o que você pode visualizar no Geogebra.

- A função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$ é ____________________________ no **intervalo** $(-\infty, 0)$.
- A função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$ é ____________________________ no **intervalo** $(0\ , +\infty)$.

d) A função $f(x) = -x^2$ admite ponto de máximo ou ponto de mínimo? Quais as coordenadas desse ponto? ____

ATIVIDADE 13(C) Repita os passos anteriores para construir a reta tangente ao gráfico das funções abaixo e complete a tabela com as informações solicitadas, visualizando-as no Geogebra.

Tabela 3.9-Atividade 13(C) – Analisando o comportamento de outras funções quadráticas com base no coeficiente angular de reta tangente a cada gráfico

FUNÇÃO	$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 2}$	$\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 6x - 4}$
Possui ponto de máximo ou mínimo?		
Coordenadas do ponto de máximo ou mínimo da função		
Intervalo que fornece coeficiente angular <u>positivo</u> da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{f(x)}$?		
Intervalo que fornece o coeficiente angular <u>negativo</u> da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{f(x)}$?		
Qual é o intervalo de <u>Crescimento</u> da função $\boldsymbol{f(x)}$?		
Qual é o intervalo de <u>Decrescimento</u> da função $\boldsymbol{f(x)}$?		

ATIVIDADE 14: Exercícios aplicados

Resolva as atividades propostas abaixo, e perceba como as ideias desenvolvidas pelas atividades que foram propostas acima, podem facilitar a resolução de problemas aplicados, os quais envolvem funções quadráticas, bem como taxas de variação (deslocamento em função do tempo, velocidade média ou em um instante, etc.).

Exercício 1. Um objeto é lançado e, a partir do solo, a sua altura $f(x)$ (em metros), em função do tempo $\boldsymbol{x}$ (em segundos), é dada pela fórmula $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 6x.}$

Siga as orientações e responda:

a) Faça o gráfico no Geogebra.

b) Insira um parâmetro $\boldsymbol{a}$ variando de 0 (min) a 6 (max).

c) Insira o ponto $\boldsymbol{P = (a, f(a))}$ e a reta tangente ao gráfico, passando por esse ponto.

d) Movimente o parâmetro $\boldsymbol{a}$, observe as alterações na reta tangente ao gráfico da função em responda:

- Quais as coordenadas do ponto $\boldsymbol{P}$, cuja reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, fornece **coeficiente angular igual a zero**? ______________________________
- Quanto tempo depois do lançamento o objeto atinge a altura máxima? _______
- Qual é a altura máxima que o objeto atinge? ______________________________
- Qual a velocidade média do objeto no **intervalo [1,2]**?

- Qual a velocidade do objeto no instante $\boldsymbol{x = 1}$? Justifique sua resposta.

____

____

____

Exercício 2. Um carrinho de controle remoto, a partir do repouso, percorreu uma distância $f(x)$ (em metros) que variou com o tempo x (em segundo), a partir da lei $f(x) = 3(x-2)^2$.

Modifique a lei da função do gráfico que você construiu no exercício anterior para esta nova função: f(x)=3*(x-2)^2. Varie o parâmetro **a**, observe as alterações e responda as questões abaixo:

a) Quais as coordenadas do ponto **P**, cuja reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, fornece coeficiente angular igual a zero? ____

b) Quanto tempo depois da largada o carrinho atingiu a menor altura? ______________

c) Qual é a altura mínima que o carrinho atingiu? _______________________________

d) Qual a velocidade média do carrinho no **intervalo [2,3]**?

e) Qual a velocidade do carrinho no instante $\boldsymbol{x = 3}$? Justifique sua resposta.

____

____

____

Exercício 3. Explique com suas palavras, qual e a diferença entre ***taxa de variação média*** (por exemplo: velocidade média), e ***taxa de variação instantânea*** (por exemplo, velocidade instantânea).

____

____

____

____

____

____

Anexo D – Roteiro de Atividades – Parte 4

Com as atividades propostas nesta etapa, o aluno será capaz de:

- Estender o conceito de área de regiões planas para regiões delimitadas por gráficos de funções, no caso, funções de 1º e 2º grau.
- Aproximar a área da região limitada sob o gráfico da função e acima do eixo OX, em um intervalo, através da soma da área de retângulos abaixo e acima da curva.
- Resolver problemas envolvendo o cálculo da área de regiões delimitadas por gráficos de funções, contínuas e positivas em um intervalo do respectivo domínio.

Cálculo da área de uma região curva

Estamos interessados, nessa etapa, em determinar **a área sob o gráfico de uma função $f(x)$,** cujo conjunto imagem é não negativo, **limitada pelo eixo OX** e **num intervalo [a, b]** do seu domínio, ou seja, **a região também limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$**.

Observe a região descrita, por exemplo, na figura ao abaixo. Nosso objetivo, nessa atividade, será **calcular a área da região colorida em destaque na figura**, bem como a área de outras regiões limitadas, de modo semelhante a essa.

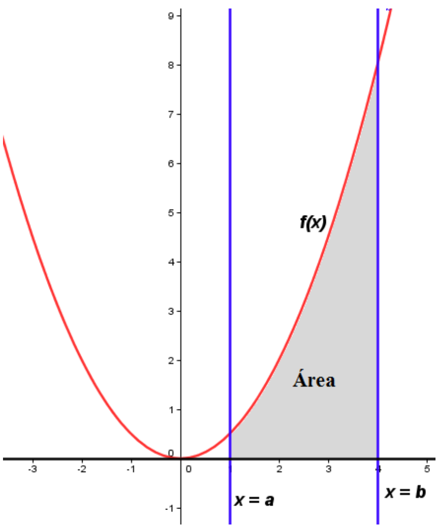


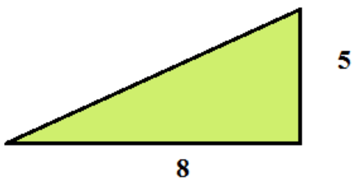
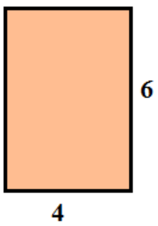
Figura 4.1: Área limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$ e pelo eixo OX num intervalo [a, b] do seu domínio

Revendo conceitos conhecidos

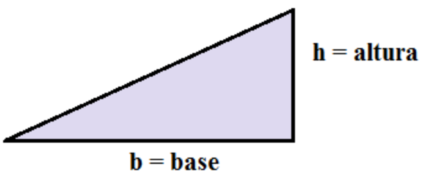
Desde o Ensino Fundamental você sabe calcular a área de regiões planas, como retângulos, quadrados, triângulos, trapézios, etc. Para as atividades que estão sendo propostas a seguir você precisará lembrar-se do cálculo da área especialmente de retângulos e triângulos.

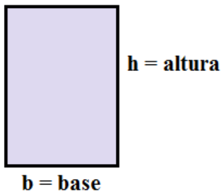
ATIVIDADE 15 - Calculando áreas de figuras planas

Abaixo são apresentadas duas figuras, com as respectivas informações para o cálculo de sua área. Com base nisso, calcule as áreas indicadas, efetuando os cálculos necessários.

FIGURA	**ÁREA: A**
 Figura 4.2: Área de um triângulo retângulo	
 Figura 4.3: Área de um retângulo	

De uma maneira mais geral, temos:

FIGURA	**ÁREA: A**
 Figura 4.4: Área de um triângulo retângulo de base b e altura h	

 Figura 4.5: Área de um retângulo de base b e altura h.	

Cálculo da área da região limitada por função de 1º grau e o eixo OX em um intervalo [a,b] do domínio da função

ATIVIDADE 16 – Observe que, como o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta, podemos facilmente **identificar a região do gráfico limitada pela reta e pelo eixo OX, como um triângulo** (Caso 1: Figura 4.6) ou **como uma união de um retângulo A_1 com um triângulo A_2** (Caso 2: Figura 4.7), neste caso a área da região é a soma das áreas:

$$\mathbf{A = A_1 + A_2.}$$

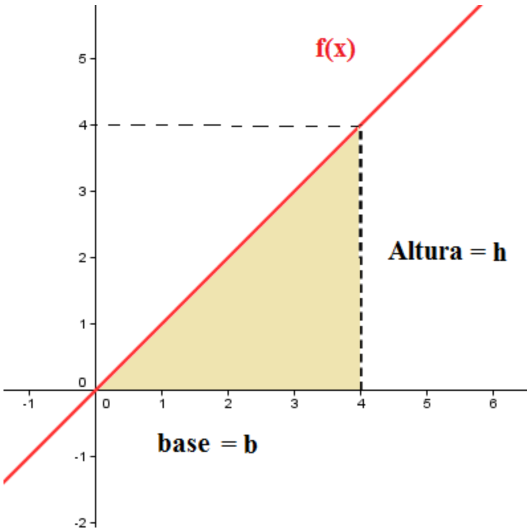


Figura 4.6: Caso 1 - A região do gráfico limitada pela reta e pelo eixo OX é um triângulo.

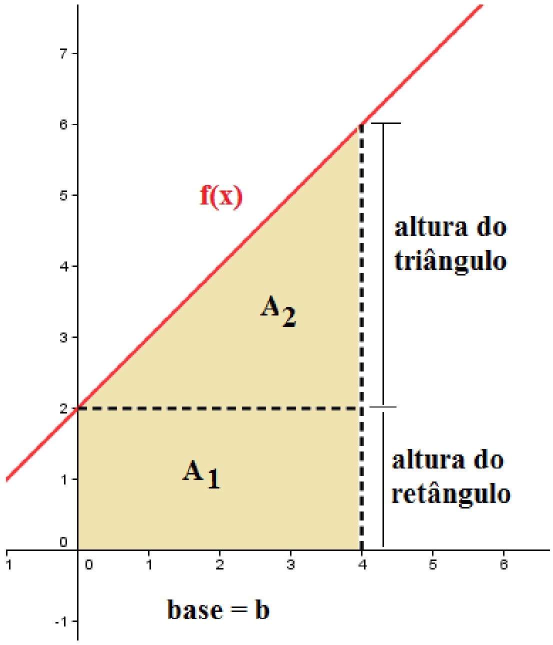


Figura 4.7: Caso 2 - A região do gráfico limitada pela reta e pelo eixo OX é a união de um retângulo A_1 com um triângulo A_2.

Com base nisso, utilize o Geogebra para visualizar o gráfico das funções dadas, nos respectivos intervalos, inserindo na barra de comandos, separadamente a lei da função e as retas **x = a** e **x = b**. Em seguida **identifique a base e altura correspondentes** em cada caso e determine a área da região especificada, **sempre limitada pelo eixo OX**.

Tabela 4.1: Atividade 16 – Cálculo da área de regiões limitadas por uma reta em um intervalo do domínio de uma função de 1º grau

Função	**[a,b]**	**Base: b** $\Delta x = x_b - x_a$	**Altura: h** **(*)**	**ÁREA**
$f(x) = x$	[0,4]			
$f(x) = x + 2$	[0, 4]			
$f(x) = -2x + 6$	[0, 3]			
$f(x) = 2x - 1$	[1,4]			

(*) Pode ser necessário determinar dois valores, conforme caso 2 (figura B) acima.

Na atividade acima, pode-se notar que o conceito de área que você já conhecia, ou seja, a área de uma figura regular, continuou a ser aplicado para o cálculo da área de uma região limitada por função de 1º grau e o eixo OX em um intervalo [a , b] do seu domínio.

A pergunta que nos resta agora é: **como calcular a área de uma região que não pode diretamente ser comparada a uma figura plana conhecida?** Responder a essa pergunta é o nosso próximo objetivo.

ATIVIDADE 17: Cálculo da área da região limitada por função de 2º grau e o eixo OX em um intervalo [a , b] do domínio da função através da aproximação por retângulos

Estamos interessados agora em determinar a área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico de uma função contínua e positiva, por exemplo, $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, e uma reta vertical, por exemplo, $\boldsymbol{x = 2}$.

A figura ao lado ilustra a área que queremos calcular.

• **Pense em uma maneira de fornecer um valor** **<u>aproximado</u>** **para a área pintada. Que valor você obteve?** Descreva o que você fez para resolver o problema.

____

____

____

____

____

____

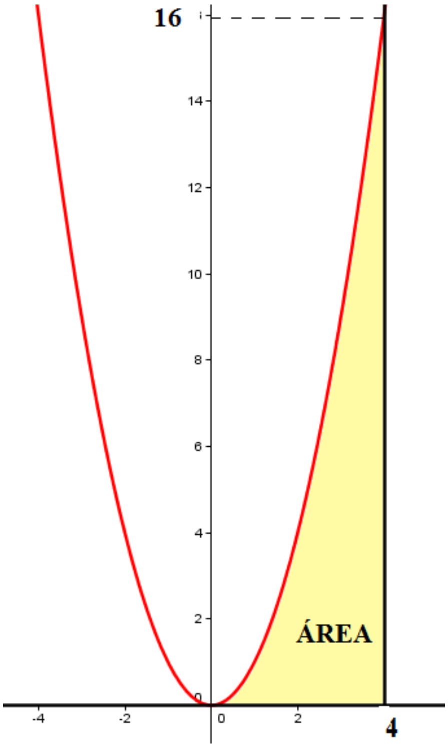


Figura 4.8: Região curva para aproximação da área na Atividade 17.

ATIVIDADE 18 (A) – Aproximando a área sob uma curva – Soma Superior

Para resolver o problema citado acima, **<u>vamos aproximar a área da região pintada utilizando o cálculo da área de retângulos, de modo a obter aproximações para a mesma</u>**.

Em uma janela do Geogebra siga as orientações abaixo.

Observação: a versão do software utilizada nessas atividades é a 6.3. Versões anteriores podem conter sintaxe diferente para a utilização dos recursos que serão trabalhados.

a) Insira a função $f(x) = x^2$, no intervalo [0, 4], introduzindo a seguinte sintaxe na barra de comandos de entrada**: Função[x^2,0,4]**

b) Modifique a espessura da linha do gráfico e a sua cor.

c) Digite na barra de comandos **n = 4** (esse é o número de retângulos que vamos inserir inicialmente).

d) Vamos utilizar o comando **Soma Superior** com 4 retângulos para começar! Para isso digite na barra de comandos: **SomaSuperior[f,0,4,n]**.

Você vai obter uma figura semelhante a abaixo, na qual ficam em evidência quatro retângulos **R1**, **R2**, **R3** e **R4**, todos de mesma base, mas de alturas variadas, porem conhecidas.

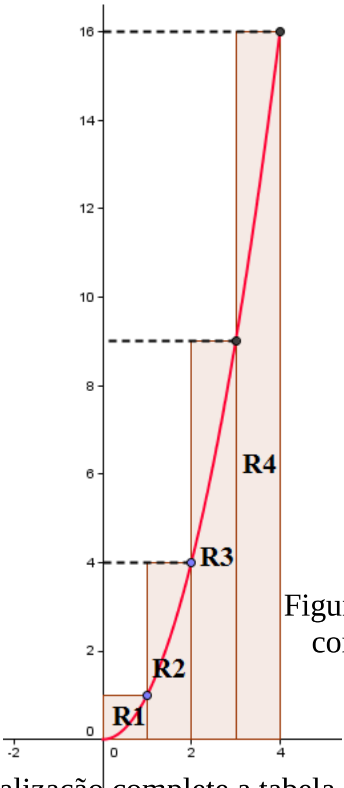


Figura 4.9: Aproximando a área sob uma curva com o comando Soma Superior do Geogebra

Com base na visualização complete a tabela abaixo:

Tabela 4.2: Cálculo das áreas dos retângulos da atividade 18(A) – Soma Superior

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**	**Retângulo 4 R4**
BASE B				
ALTURA h = f(x)				
ÁREA: A = b . h				

e) Qual é o **<u>valor da soma</u>** das áreas dos quatro retângulos? Calcule. ____

f) Observe que na janela algébrica do Geogebra, apareceu um novo parâmetro **“a”**, em destaque com cor diferente. **Qual é o valor que esta indicando esse parâmetro?** ____

ATIVIDADE 18(B) Aproximando a área sob uma curva – Soma Inferior

Na mesma janela do Geogebra siga as orientações:

a) Clique sobre o parâmetro **“a”** na janela algébrica e desabilite o valor da soma superior.

b) Vamos agora, utilizar o comando **Soma Inferior,** também com 4 retângulos. Para isso digite na barra de comandos: **SomaInferior[f,0,4,n]**.

Você vai obter uma figura semelhante a anterior, na qual ficam em evidência quatro retângulos **R1**, **R2**, **R3** e **R4**, todos de mesma base, mas de alturas variadas, porém novamente conhecidas. Observe que R1 não fica visível já que sua altura é 0 (zero).

Com base na visualização, complete a tabela abaixo:

Tabela 4.3 - Cálculo das áreas dos retângulos da atividade 18(B) – Soma Inferior

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**	**Retângulo 4 R4**
BASE B				
ALTURA h = f(x)				
ÁREA: A = b . h				

c) Qual é o **<u>valor da soma</u>** das áreas dos quatro retângulos? Calcule. ____

d) Observe que na janela algébrica do Geogebra, apareceu um novo parâmetro **“b”**, em destaque com cor diferente. **Que valor indica esse parâmetro?**

____

Observe que, com as atividades anteriores, obtemos uma aproximação *por excesso* (por cima) na Atividade 18 (A) e *por falta* (por baixo) na Atividade 18 (B).

O valor que você tinha determinado intuitivamente para a área dessa região na atividade 17 está entre os valores dos parâmetros que você determinou acima? Justifique.

____

ATIVIDADE 18(C) – Aumentando o número de retângulos

Na mesma tela do Geogebra, habilite novamente a Soma Superior, clicando sobre o parâmetro **“a”** na janela algébrica.

Observe que a área da região abaixo da curva do gráfico que queremos calcular fica limitada pelos valores da **Soma Superior** e **Soma Inferior**, ou seja:

Soma Inferior < ÁREA PROCURADA < Soma Superior

Com base nisso, podemos aumentar o número de retângulos e encontrar valores cada vez mais próximos da área real abaixo do gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, **limitada pelo eixo OX e pela reta** $\boldsymbol{x = 4}$.

Para concluir acerca disso, modifique os valores de ***n*** (clicando sobre ***n*** na janela algébrica), conforme indicado em cada caso e preencha a tabela abaixo:

Tabela 4.4: Aproximação da área através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra.

	n = 5	**n = 8**	**n = 10**	**n = 15**	**n = 20**	**n = 100**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior “a”								
Soma Inferior “b”								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área da região se aproxima cada vez mais de que valor? ______________________**

Assim, uma boa aproximação para a área indicada na figura 4.8 da Atividade 17, ou seja, abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $\boldsymbol{f(x) = x^2}$**, limitada** pelo **eixo OX** e pela **reta vertical** $\boldsymbol{x = 4}$, ou seja, **no intervalo [0 , 4]** é _________________________.

ATIVIDADE 19: TRABALHANDO COM OUTRA FUNÇÃO - Considere agora a função $\boldsymbol{f(x) = 4 - x^2}$. Vamos determinar a área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico dessa função, contínua e positiva, e pela reta vertical $\boldsymbol{x = 2}$.

ATIVIDADE 19(A) – Aproximando a área – Soma Superior

Em uma nova janela do Geogebra siga as orientações:

a) Insira a função $f(x) = 4 - x^2$, no intervalo [0, 2], introduzindo a seguinte sintaxe na barra de comandos de entrada**: Função[4-x^2,0,2]**

b) Modifique a espessura da linha do gráfico e a sua cor.

c) Digite na barra de comandos n = 4 (esse é o número de retângulos que vamos inserir inicialmente).

d) Vamos utilizar, novamente, o comando **Soma Superior** com 4 retângulos. Para isso digite na barra de comandos: **SomaSuperior[f,0,2,n]**.

Com base na visualização, identifique os dados pedidos e complete a tabela abaixo:

Tabela 4.5 - Cálculo das áreas dos retângulos da atividade 19(A) – Soma Superior

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**	**Retângulo 4 R4**
BASE B				
ALTURA h = f(x)				
ÁREA: A = b . h				

e) Qual é o **valor da soma** das áreas dos quatro retângulos? Calcule.

____

f) Qual é o valor do parâmetro "a" que aparece na janela algébrica?

____

g) Explique com suas palavras o significado do valor numérico representado pelo parâmetro **"a"**.

____

____

ATIVIDADE 19(B) – Aproximando a área – Soma Inferior

Na mesma janela do Geogebra siga as orientações**:**

a) Clique sobre o parâmetro **"a"** na janela algébrica e *desabilite* o valor da soma superior.

b) Utilize o comando **Soma Inferior,** também com 4 retângulos, digitando na barra de comandos: **SomaInferior[f,0,2,n]**.

Com base na visualização complete a tabela abaixo:

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**	**Retângulo 4 R4**
BASE B				
ALTURA h = f(x)				
ÁREA: A = b . h				

Tabela 4.6 - Cálculo das áreas dos retângulos da atividade 19(B) – Soma Inferior

c) Qual é o **valor da soma** das áreas dos quatro retângulos? Calcule.

____

d) **Qual é o parâmetro "b" o valor que indica aproximação da área desejada, por falta, nesse caso?____**

ATIVIDADE 19(C) – Aumentando o número de retângulos

Na mesma tela do Geogebra, habilite novamente a Soma Superior, clicando sobre o parâmetro **"a"** na janela algébrica.

Mais uma vez, note que a área da região abaixo da curva do gráfico que queremos calcular fica limitada pelos valores da Soma Superior e Soma Inferior, ou seja:

Soma Inferior < ÁREA PROCURADA < Soma Superior

Com base nisso, podemos aumentar o número de retângulos e encontrar valores cada vez mais próximos da área real abaixo do gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$, limitada pelo eixo OX e pela reta $x = 2$.

Faça como antes, modifique os valores de n conforme indicado em cada caso, e preencha a tabela abaixo:

Tabela 4.7 - Aproximação da área através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 19 (C)

	n = 5	**n = 8**	**n = 10**	**n = 15**	**n = 20**	**n =100**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior "a"								
Soma Inferior "b"								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área da região se aproxima cada vez mais de quanto? ____**

Assim, uma boa aproximação para a área da região descrita, ou seja, abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = 4 - x^2$, limitada pelo eixo OX e pela reta vertical $x = 2$, ou seja, no intervalo [0 , 2] é _________________________.

ATIVIDADE 20: É possível aproximar a área através de outras figuras geométricas?

Até agora, usamos a ideia de aproximar a área sob a curva do gráfico de uma função positiva, contínua, definida em um intervalo, usando RETÂNGULOS de bases iguais, cujas respectivas alturas correspondem a imagem da função em determinados pontos do intervalo considerado. Essa área pode ser aproximada através de outras figuras!

- **VOCÊ SERIA CAPAZ DE IMAGINAR OUTRA FIGURA GEOMÉTRICA OU OUTRA FORMA DE APROXIMAR ESSA ÁREA? Explique.**

____

____

____

ATIVIDADE 21: Considere agora a função $f(x) = x^2 - 5x + 9$. Vamos determinar a área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico dessa função, contínua e positiva, no intervalo [1,4], ou seja, pelas retas $x = 1$ e $x = 4$.

ATIVIDADE 21 (A) – Aproximando a área – Soma Superior

Em uma nova janela do Geogebra siga as orientações:

a) Insira a função $f(x) = x^2 - 5x + 9$, no intervalo [1, 4], introduzindo a seguinte sintaxe na barra de comandos de entrada**: Função[x^2-5*x+9,1,4]**

b) Modifique a espessura da linha do gráfico e a sua cor.

c) Digite na barra de comandos n = 3 (esse é o número de retângulos que vamos inserir agora, já que queremos retângulos de base uma unidade).

d) Vamos utilizar, novamente, o comando **Soma Superior** com 3 retângulos. Para isso digite na barra de comandos: **SomaSuperior[f,1,4,n]**.

Com base na visualização, identifique os dados pedidos e complete a tabela abaixo:

Tabela 4.8 - Cálculo das áreas dos retângulos da atividade 21(A) – Soma Superior

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**
BASE B			
ALTURA h = f(x)			
ÁREA: A = b . h			

e) Qual é o **valor da soma** das áreas dos três retângulos? Calcule.

____

f) Qual é o valor do parâmetro "a" que aparece na janela algébrica?

____

ATIVIDADE 21(B) – Aproximando a área – Soma Inferior

Na mesma janela do Geogebra siga as orientações:

a) Clique sobre o parâmetro "a" na janela algébrica e desabilite o valor da soma superior.

b) Utilize o comando **Soma Inferior,** também com 3 retângulos, digitando na barra de comandos: **SomaInferior[f,1,4,n]**.

Com base na visualização complete a tabela abaixo:

Tabela 4.9 - Cálculo das áreas dos retângulos da atividade 21(B) – Soma Inferior

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**
BASE B			
ALTURA h = f(x)			
ÁREA: A = b . h			

c) Qual é o **valor da soma** das áreas dos três retângulos? Calcule. ____

d) **Qual é o parâmetro "b" o valor que indica aproximação da área desejada, por falta, nesse caso?**____

ATIVIDADE 21(C) – Aumentando o número de retângulos

Faça como antes, modifique os valores de n conforme indicado em cada caso e preencha a tabela abaixo:

Tabela 4.10 - Aproximação da área através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 21(C)

	n = 5	**n = 8**	**n = 10**	**n = 15**	**n = 20**	**n =100**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior "a"								
Soma Inferior "b"								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área da região se aproxima cada vez mais de quanto?** ____

Assim, a área da região descrita, ou seja, abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = x^2 - 5x + 9$, limitada pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = 4$, portanto, no intervalo [1 , 4] é ________________________.

Cálculo da área da região limitada por duas funções em um intervalo [a , b], onde a e b são as abscissas dos pontos de intersecção dos respectivos gráficos

A partir de agora vamos determinar a área limitada por duas curvas. Para fazer isso precisamos seguir o seguinte roteiro:

1º) Visualizar a região pedida (no nosso caso, inserindo separadamente as duas funções no Geogebra);

2º) Encontrar os dois pontos de intersecção entre os dois gráficos. As abscissas desses pontos formarão o nosso intervalo [a, b] , no qual vamos aproximar a área.

3º) Calcular a área **A1** da curva que fica mais acima, no intervalo [a , b], utilizando o que já conhecemos.

4º) Calcular a área **A2** limitada pela outra curva, também no intervalo [a , b].

5º) Calcular a área desejada fazendo: **A = A1 – A2**.

Vamos colocar esse roteiro em prática resolvendo alguns exemplos!

ATIVIDADE 22: Determine a área da região limitada entre as curvas:

$$\boldsymbol{f(x) = x + 6 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2}$$

Em uma nova janela do Geogebra siga as orientações:

a) Insira a função $\boldsymbol{f(x) = x - 6}$, e tecle *enter*.

b) Insira a função $\boldsymbol{g(x) = x^2}$, usando a sintaxe **g(x)=x^2,** e tecle *enter*.

c) Modifique as espessuras das linhas dos gráficos, selecione a cor vermelha para a função **f(x)** e a azul par a função **g(x)**.

d) Ajuste a tela com a opção **Transladar janela de Visualização** com o **Botão 11**.

e) Identifique os pontos de intersecção dos gráficos de **f(x)** e **g(x)**.

Para isso digite na barra de comandos: **interseção[f,g]**

Quais os dois pontos de intersecção? A=________ e B = __________.

f) Identifique o intervalo no qual nos interessa calcular as áreas: $\boldsymbol{[x_A, x_B]}$ **= [__ , __].**

g) Use a opção **Seletor (Botão 10)** e insira o parâmetro ***n*** variando de 1 (*min*) a 1000 (*max*), com **incremento igual a 5**. Conforme figura abaixo:

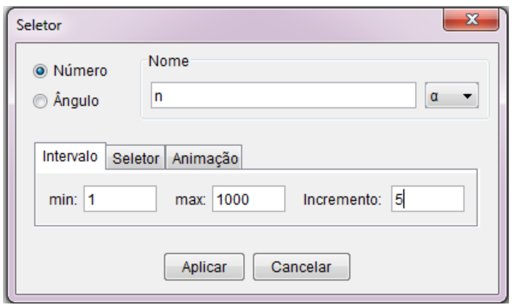


Figura 4.10 - Ferramenta Seletor do Geogebra

h) Vamos utilizar , novamente, os comandos **Soma Superior** e **Soma Inferior** para as funções $f(x)$ e $g(x)$.

- **Para a função $f(x) = x + 6$, no intervalo [- 2 , 3] (**identificado acima):

Inserir os comandos **SomaSuperior[f,-2,3,n]** e **SomaInferior[f,-2,3,n]**, clicar no botão 1 (Mover) e movimentar o parâmetro ***n*** para preencher a tabela abaixo, com base na visualização:

Tabela 4.11 - Aproximação da área A_1 através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 22.

	n = 5	**n = 10**	**n = 20**	**n = 50**	**n = 100**	**n =200**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior "a"								
Soma Inferior "b"								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área A_1 da região se aproxima cada vez mais de que valor? ____**

Assim, a área da região abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = x - 6$, limitada pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = -2$ e $x = 3$, portanto, no intervalo [-2 , 3] é ________________________.

- **Para a função $f(x) = x^2$, no intervalo [- 2, 3]**

Primeiro desabilitar as parâmetros "a" e "b" anteriores. Depois inserir os comandos **SomaSuperior[g,-2,3,n]** e **SomaInferior[g,-2,3,n]**, clicar no botão 1 (Mover) e movimentar o parâmetro n para preencher a tabela abaixo, com base na visualização:

Tabela 4.12 - Aproximação da área A_2 através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 22.

	n = 5	**n = 10**	**n = 20**	**n = 50**	**n = 100**	**n =200**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior "c"								
Soma Inferior "d"								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área A_2 da região se aproxima cada vez mais de quanto?** ____

Assim, a área da região abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = x^2$, limitada pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = -2$ e $x = 3$, portanto, no intervalo [-2 , 3] é __________________________.

PARA CONCLUIR:

CALCULE A ÁREA ENTRE AS CURVAS $f(x)$ e $g(x)$ dada por:

$$A = A_1 - A_2$$

____

Portanto, a área da região limitada pelas curvas é: __________________________

ATIVIDADE 23: Determine a área da região limitada entre as curvas:

$$y = f(x) = 4 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 4x + 4$$

Em uma nova janela do Geogebra siga as orientações:

a) Insira a função $f(x) = 4$, e tecle *enter*.

b) Insira a função $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 4}$, usando a sintaxe **g(x)=x^2-4x+4,** tecle *enter*.

c) Modifique as espessuras e a cor das linhas dos gráficos das funções **f(x)** e **g(x)**.

d) Ajuste a tela, para melhor visualização, com a opção **Transladar janela de Visualização** com o **Botão 11**.

e) Identifique os pontos de intersecção dos gráficos de **f(x)** e **g(x)**.

Para isso digite na barra de comandos: **interseção[f,g]**

Quais os dois pontos de intersecção? A=________ e B = __________.

f) Identifique o intervalo no qual nos interessa calcular as áreas: **[$\boldsymbol{x_A, x_B}$] = [__ , __].**

g) Use a opção **Seletor (Botão 10)** e insira o parâmetro ***n*** variando de 1 (*min*) a 1000 (*max*), com **incremento igual a 5**.

h) Utilize, novamente, os comandos **Soma Superior** e **Soma Inferior** para as funções $f(x)$ e $g(x)$.

- **Para a função $\boldsymbol{f(x) = 4}$, no intervalo [0 , 4]:**

Inserir os comandos **SomaSuperior[f,0,4,n]** e **SomaInferior[f,0,4,n]**, clicar no **botão 1 (Mover)** e movimentar o parâmetro ***n*** para preencher a tabela abaixo, com base na visualização:

Tabela 4.13 - Aproximação da área A_1 através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 23.

	n = 5	n = 10	n = 20	n = 50	n = 100	n =200	n=500	n=1000
Soma Superior “a”								
Soma Inferior “b”								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área A_1 da região se aproxima cada vez mais de que valor?** ____

Assim, a área da região abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = 4$, limitada pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 4$, portanto, no intervalo [0 , 4] é __________________________.

- **Para a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$, no intervalo [0, 4]**

Primeiro desabilitar as parâmetros “a” e “b” anteriores. Depois inserir os comandos **SomaSuperior[g,0,4,n]** e **SomaInferior[g,0,4,n]**, clicar no **botão 1 (Mover**) e movimentar o parâmetro ***n*** para preencher a tabela abaixo, com base na visualização:

Tabela 4.14 - Aproximação da área A_2 através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 23.

	n = 5	**n = 10**	**n = 20**	**n = 50**	**n = 100**	**n =200**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior “c”								
Soma Inferior “d”								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área A_2 da região se aproxima cada vez mais de quanto?** ____

Assim, a área da região abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = x^2 - 4x + 4$, limitada pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 4$, portanto, no intervalo [0 , 2] é __________________________.

PARA CONCLUIR:

CALCULE A ÁREA ENTRE AS CURVAS $f(x)$ e $g(x)$ dada por:

$$A = A_1 - A_2$$

____

A área da região limitada pelas curvas é: ______________________________

ATIVIDADE 24: Determine a área da região limitada entre as curvas:

$$\boldsymbol{f(x) = 8 - x^2} \quad \textbf{e} \quad \boldsymbol{g(x) = x^2}$$

Em uma nova janela do Geogebra siga as orientações:

a) Insira a função $\boldsymbol{f(x) = 8 - x^2}$, e tecle *enter*.

b) Insira a função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, usando a sintaxe **g(x)=x^2,** tecle *enter*.

c) Modifique as espessuras e as cores das linhas dos gráficos.

d) Ajuste a tela com a opção **Transladar janela de Visualização** com o **Botão 11**.

e) Identifique os pontos de intersecção dos gráficos de **f(x)** e **g(x)**.

Para isso digite na barra de comandos: **interseção[f,g]**

Quais os dois pontos de intersecção? A=________ e B = __________.

f) Identifique o intervalo no qual nos interessa calcular as áreas: **$[\boldsymbol{x_A, x_B}]$ = [__ , __].**

g) Use a opção **Seletor (Botão 10)** e insira o parâmetro ***n*** variando de 1 (*min*) a 1000 (*max*), com **incremento igual a 5**.

h) Utilize, novamente, os comandos **Soma Superior Soma Inferior** para as funções $f(x)$ e $g(x)$.

- **Para a função $\boldsymbol{f(x) = 8 - x^2}$, no intervalo [-2 , 2]:**

Inserir os comandos **SomaSuperior[f,-2,2,n]** e **SomaInferior[f,-2,2,n]**, clicar no **botão 1 (Mover)** e movimentar o parâmetro ***n*** para preencher a tabela abaixo, com base na visualização:

Tabela 4.15: Aproximação da área A_1 através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 24.

	n = 5	**n = 10**	**n = 20**	**n = 50**	**n = 100**	**n =200**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior “a”								
Soma Inferior “b”								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área A_1 da região se aproxima cada vez mais de que valor? ____**

Assim, a área da região abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = 8 - x^2$, limitada pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = -2$ e $x = 2$, portanto, no intervalo [-2 , 2] é ________________________.

- **Para a função $f(x) = x^2$, no intervalo [-2 , 2]:**

Primeiro desabilitar as parâmetros “a” e “b” anteriores. Depois inserir os comandos **SomaSuperior[g,-2,2,n]** e **SomaInferior[g,-2,2,n]**, clicar no **botão 1 (Mover**) e movimentar o parâmetro ***n*** para preencher a tabela abaixo, com base na visualização:

Tabela 4.16: Aproximação da área A_2 através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade 24.

	n = 5	**n = 10**	**n = 20**	**n = 50**	**n = 100**	**n =200**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior “c”								
Soma Inferior “d”								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área A_2 da região se aproxima cada vez mais de quanto?** ____

Assim, a área da região abaixo da curva do gráfico da função contínua e positiva $f(x) = x^2$, limitada pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = -2$ e $x = 2$, portanto, no intervalo [-2 , 2] é ________________________.

PARA CONCLUIR:

CALCULE A ÁREA ENTRE AS CURVAS $f(x)$ e $g(x)$ dada por:

$$\boldsymbol{A = A_1 - A_2}$$

____

A área da região limitada pelas curvas é: ____________________________

Anexo E – Roteiro de Atividades –Avaliação Final

O objetivo das atividades propostas, nesta etapa, é avaliar se os conceitos intuitivos de Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, as ideias de limites, velocidade média e velocidade instantânea e a área de uma figura curva, os quais foram abordados ao longo dos quatro roteiros apresentados acima, foram compreendidos pelos estudantes. Essa atividade avaliativa explorou todos os conceitos que foram desenvolvidos aplicados ao estudo de uma mesma função quadrática, a função $f(x) = -x^2 + 9$.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES – AVALIAÇÃO

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1: Construa, em uma janela do Geogebra, o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 9$. Com ajuda de uma calculadora e observando o gráfico, responda:

a) Calcule e complete os valores das tabelas abaixo, para a função dada.

Tabela 5.1 - Limite da função $f(x) = -x^2 + 9$ para x se aproximando de 2 pela esquerda

x	1	1.5	1.8	1.9	1.99	1.999	1.9999
$f(x) = -x^2 + 9$							

Agora, complete a frase corretamente, de acordo com a tabela 5.1: **Na medida em que os valores de x se aproximam cada vez mais do número ______ , pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais do número ________.**

Tabela 5.2 - Limite da função $f(x) = -x^2 + 9$ para x se aproximando de 3 pela direita

x	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001	2.0001
$f(x) = -x^2 + 9$							

Agora, complete a frase corretamente, de acordo com a tabela 5.2: **Na medida em que os valores de x se aproximam cada vez mais do número ______ , pela direita, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais do número ________.**

CONCLUSÃO: O **LIMITE** da $f(x) = -x^2 + 9$ para x **tendendo a ____** (ou seja, para valores de x cada vez mais próximo de ____) **é igual a _______**.

Escrevemos:

$$\lim_{x \to \_\_\_} f(x) = \_\_\_\_$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2: Observando o gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$, com ajuda de uma calculadora e observando o gráfico:

a) Calcule e complete os valores das tabelas abaixo, para a função dada.

Tabela 5.3 - Limite da função $f(x) = -x^2 + 9$ para valores de x cada vez maiores.

x	1	5	10	20	50	100	1000
$f(x) = -x^2 + 9$							

Agora, responda, de acordo com a tabela 5.3: **Na medida em que os valores de x crescem cada vez mais, o que acontece com os valores de $f(x)$?**

____

____

CONCLUSÃO: O **LIMITE** da $f(x) = -x^2 + 9$ para x **tendendo a ____** (ou seja, para valores de x cada vez maiores e positivos) **é igual a _______**.

Escrevemos:

$$\lim_{x \to \_\_\_} f(x) = \_\_\_\_$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3: Ainda, observando o gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$, com ajuda de uma calculadora e observando o gráfico:

a) Calcule e complete os valores das tabelas abaixo, para a função dada.

Tabela 5.4 - Limite da função $f(x) = -x^2 + 9$ para valores de x cada vez menores

$\boldsymbol{x}$	**- 1**	**- 5**	**- 10**	**- 20**	**- 50**	**- 100**	**- 1000**
$\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 9}$							

Agora, responda, de acordo com a tabela 5.4: **Na medida em que os valores de $\boldsymbol{x}$ decrescem cada vez mais, o que acontece com os valores de $\boldsymbol{f(x)}$?**

____

____

CONCLUSÃO: O **LIMITE** da $f(x) = -x^2 + 9$ para x **tendendo a ____** (ou seja, para valores de x cada vez menores e negativos) **é igual a _______**.

Escrevemos:

$$\lim_{x \to \_\_} f(x) = \_\_\_\_$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 4: No gráfico da função $f(x) = -x^2 + 9$, insira um parâmetro $\boldsymbol{a}$, variando de -5(min) a 5(máx) insira um ponto $\boldsymbol{P = (a, f(a))}$ sobre o gráfico e a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ nesse ponto P.

Movimente o parâmetro **a** e observe as alterações na reta tangente ao gráfico da função. Em seguida responda:

a) Quais as coordenadas do ponto $\boldsymbol{P}$, cuja reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, fornece **coeficiente angular igual a zero**? ____________________________________

b) Imagine que esse seja o gráfico do movimento de um objeto. Marque os pontos $A = (1, f(1))$ e $B = (2, f(2))$ e a reta que passa por A e B. Qual a velocidade média do objeto no **intervalo [1,2]**?

Lembre-se: $\boldsymbol{V_{Méd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

c) Qual a velocidade do objeto no instante $\boldsymbol{x = 2}$? Justifique sua resposta.

____

____

____

d) A função $f(x) = -x^2 + 9$ possui ponto de máximo ou mínimo?

____

e) Escreva as coordenadas do ponto de máximo ou mínimo da função:

____

f) Que intervalo que fornece **coeficiente angular** **positivo** **da reta tangente** ao gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$?

____

g) Que intervalo que fornece o **coeficiente angular** **negativo** **da reta tangente** ao gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$?

____

h) Qual é **o intervalo de Crescimento** da função $f(x) = -x^2 + 9$?

____

i) Qual é **o intervalo de Decrescimento** da função $f(x) = -x^2 + 9$?

____

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 5: Considere, ainda, a função $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 9}$. Determine a área limitada pelo eixo OX, pelo gráfico dessa função, e pelas retas verticais $\boldsymbol{x = 0 \; e \; x = 3}$.

(A) – Aproximando a área – Soma Superior

Em uma nova janela do Geogebra, insira a função $f(x) = -x^2 - 9$, no intervalo [0, 3], introduzindo a seguinte sintaxe na barra de comandos de entrada**: Função[-x^2+9,0,3]**

a) Digite na barra de comandos $\boldsymbol{n = 3}$ (esse é o número de retângulos que vamos inserir inicialmente).

b) Utilize o comando **Soma Superior** com 4 retângulos: **SomaSuperior[f,0,2,n]**.

Com base na visualização, identifique os dados pedidos e complete a tabela abaixo:

Tabela 5.5 - Cálculo das áreas dos retângulos da atividade complementar 5(A) – Soma Superior

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**
BASE b			
ALTURA h = f(x)			
ÁREA: A = b . h			

c) Qual é o **valor da soma** das áreas dos três retângulos? Calcule. ____

d) **Qual é o valor parâmetro "a" que indica a aproximação da área desejada, por excesso, nesse caso?**____

(B) – Aproximando a área – Soma Inferior

Na mesma janela do Geogebra siga as orientações:

a) Clique sobre o parâmetro **"*a*"** na janela algébrica e *desabilite* o valor da soma superior.

b) Utilize o comando Soma Inferior: **SomaInferior[f,0,2,n]**.

Com base na visualização complete a tabela abaixo:

Tabela 5.6 - Cálculo das áreas dos retângulos da atividade complementar 5(B) – Soma Inferior

	Retângulo 1 R1	**Retângulo 2 R2**	**Retângulo 3 R3**
BASE B			
ALTURA h = f(x)			
ÁREA: A = b . h			

c) Qual é o **valor da soma** das áreas dos três retângulos? Calcule.

____

d) **Qual é o valor parâmetro "b" que indica a aproximação da área desejada, por falta, nesse caso?**____

(C) – Aumentando o número de retângulos

Na mesma tela do Geogebra, habilite novamente a Soma Superior, clicando sobre o parâmetro **"a"** na janela algébrica. Modifique os valores de **n** conforme indicado em cada caso e preencha a tabela abaixo:

Tabela 5.7 - Aproximação da área através do aumento do número de retângulos com os comandos Soma Superior e Soma Inferior do Geogebra na atividade complementar 5.

	n = 5	**n = 8**	**n = 10**	**n = 15**	**n = 20**	**n =100**	**n=500**	**n=1000**
Soma Superior "a"								
Soma Inferior "b"								

Agora, responda: **Na medida em que o número de retângulos aumenta cada vez mais, o valor da área da região se aproxima cada vez mais de quanto?** ____

Assim a área da região descrita, ou seja, abaixo da curva do gráfico da função $f(x) = -x^2 - 9$, limitada pelo eixo OX e pela reta vertical $x = 2$, portanto, no intervalo [0 , 3] é ________________________.

Anexo F – Questionário Inicial

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: "Cálculo Diferencial e Integral aplicado ao estudo de funções quadráticas no Ensino Médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra". **Professora: Jaqueline Molon**

LEVANTAMENTO DE DADOS SOBRE OS PARTICIPANTES DO TRABALHO

PARTE I: Dados de Identificação

P1. Qual a sua idade: ________________________

P2. Série/ano: ______________________________

PARTE II: Sobre o relacionamento com a disciplina de Matemática

P3. Você acha a disciplina de Matemática fácil? Justifique sua resposta abaixo.

1 ( ) Sim.

2 ( ) Mais ou menos.

3 ( ) Não. Tudo é muito difícil.

Justificativa:____

____

____

P4. Em relação aos exercícios propostos nas aulas de Matemática, assinale a alternativa que traz o tipo de exercício que você prefere resolver, justificando sua resposta.

1 ( ) Exercícios que exijam a aplicação de fórmulas, baseados em exemplos já estudados.

2 ( ) Problemas que precisam ser lidos e interpretados antes de iniciar a resolução, de modo a estimular o raciocínio.

3 ( ) Atividades que possam ser resolvidas utilizando algum tipo de recurso computacional, para facilitar a visualização e a interpretação de informações.

4 ( ) Outro. Qual?____

Justifique sua resposta.

____

____

P5. Você está entendendo os conteúdos de matemática deste ano letivo? Por quê?

1 ( ) Sim. 2 ( )Mais ou menos. 3.( ) Não.

Por quê?

____

____

P6. Você apresentou dificuldades nos conteúdos referentes ao estudo de funções de 1º e 2º grau, durante esse ano? Como foi seu desempenho nesses conteúdos? Justifique suas respostas.

____

____

____

P7. Durante seus estudos sobre a função linear, você estudou o significado do coeficiente angular de uma reta que é o gráfico desse tipo de função?

1. ( ) Não.
2. ( ) Não lembro.
3. ( ) Sim. Nesse caso, escreva o que você lembra sobre esse conceito.

____

____

P8. Durante seus estudos sobre a função quadrática, você trabalhou com problemas de aplicação dessa função?

1. ( ) Não 2. ( ) Não lembro. 3. ( ) Sim.

Se respondeu sim, pode citar algum exemplo ? Qual?

____

____

Anexo G – Questionário Final

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: "Cálculo Diferencial e Integral aplicado ao estudo de funções quadráticas no Ensino Médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra". **Professora: Jaqueline Molon**

QUESTIONÁRIO FINAL

PARTE I: Dados de Identificação

P1. Qual a sua idade: ________________________

P2. Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

P3. Série/ano: ______________________________

PARTE II: Sobre o material elaborado para as atividades

P4. Considere o material elaborado para o desenvolvimento das atividades propostas em cada encontro. De **0 (zero - nota mínima)** a **10 (dez - nota máxima)** que nota você daria para cada item abaixo:

a) A linguagem, o texto explicativo e as orientações estavam adequados ao seu entendimento? ( )

b) O material estava bem organizado? ( )

c) As informações foram apresentadas de maneira clara e objetiva? ( )

d) A sequência e o desenvolvimento das atividades proporcionavam o seu aprendizado de acordo com os objetivos de cada roteiro? ( )

e) Que sugestões você daria para melhorar a escrita e a organização do material impresso que você recebeu, de modo a facilitar o entendimento dos conceitos desenvolvidos durante as atividades?

____
____
____
____

PARTE III: Sobre as atividades desenvolvidas ao longo dos encontros

P5. Avalie seu envolvimento, dedicação e participação nas atividades durante os encontros. De 0 (zero - nota mínima) a 10 (dez - nota máxima) que nota você se daria? _______ Por quê?

____
____
____

P6. Você já conhecia o software Geogebra? **( )Sim ( )Não**

P7. Sobre a linguagem e a utilização dos comandos do software Geogebra, o que você achou?
( ) Muito Difícil ( ) Difícil ( ) Fácil ( ) Muito Fácil
Explique.

____
____

P8. Os conceitos de limite de uma função quadrática para x tendendo a um valor ou para x tendendo a $+\infty$ ou $-\infty$ foram abordados, bem como o limite de uma sequência de números reais. O Geogebra ajudou a visualizar esses conceitos?
( ) Sim, muito. ( )Sim, um pouco. ( ) Não, nada.

P9. Trabalhamos com o Geogebra construções que buscavam abordar os conceitos de Velocidade Média (variação média) e Velocidade Instantânea (variação instantânea). O Geogebra ajudou a visualizar esses conceitos?
( ) Sim, muito. ( )Sim, um pouco. ( ) Não, nada.

P10. O conceito de área de uma região limitada pelo gráfico de uma função positiva, limitada por uma reta vertical e pelo Eixo OX, bem como limitada por duas funções em um intervalo determinado do domínio, também foram abordados. O Geogebra ajudou a visualizar esses conceitos?

( ) Sim, muito. **( )Sim, um pouco.** **( ) Não, nada.**

P11. As atividades realizadas com o software Geogebra foram:

(podem ser marcadas várias opções, de acordo com a sua opinião):

( ) bastante interessantes
( ) pouco interessantes
( ) Interessantes mas muito complexas.
( ) Interessantes, mas desafiadoras.
( ) Difíceis
( ) Chatas
( ) Outra característica. Qual?
____

P12. Você acredita que as atividades desenvolvidas com base no estudo das funções quadráticas e lineares com foco em Cálculo, contribuíram para enriquecer os conhecimentos que você já tinha sobre essas funções?

( ) Sim, muito. **( ) Sim, um pouco.** **( ) Não, nada.**

Explique.

____

____

P13. Você acredita que o software Geogebra poderia auxiliar no entendimento do comportamento e das propriedades dos gráficos de funções no 1º ano do Ensino Médio?

( ) Sim **( ) Não**

Por quê? ____

____

P14. Faça comentários (fique a vontade para expressar sua opinião: críticas, sugestões, elogios, etc.) acerca das atividades que você participou, depois responda: Qual era sua expectativa acerca desse “minicurso”? As atividades desenvolvidas atenderam suas expectativas? Explique.

____

____

____